Математика

Математический анализ

для студентов направления 09.03.02.ИСиТ

Учебное пособие

Математика

Математический анализ

для студентов направления 09.03.02.ИСиТ

*студента(ки)*_______*курса*___________________________*факультета*

____

____

*группы №*______

*направления*____

____

Ставрополь
2021

УДК
ББК
М

Авторский коллектив:
Татьяна Александровна Гулай
Виктория Артемовна Жукова
Анна Федоровна Долгополова

Математика : Математический анализ *для студентов экономического факультета***:** учебное пособие / Т.А. Гулай, В.А. Жукова, А.Ф. Долгополова.– Ставрополь: 2021. – 133 с.

Учебное пособие входит в серию методических разработок, призванных способствовать овладению студентами теоретическими основами материала и появлению у них навыков решения задач по основным разделам математического анализа в математике. В пособии приводятся примеры задач в каждом разделе с подробным решением, задания для решения в аудитории и типовые варианты расчетно-графических работ по изучаемым темам.

УДК
ББК
М

ГЛАВА 1 ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
1.1 Первообразная функции и неопределенный интеграл

В дифференциальном исчислении решалась задача, где по данной функции $y = f(x)$ находилась ее производная или дифференциал.

В интегральном же исчислении решается обратная задача: по дифференциалу данной функции находится сама функция. Этот процесс называется **интегрированием.**

Первообразной от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется функция $F(x)$, производная которой в каждой точке отрезка равна $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$

Теорема. *Две различные первообразные одной и той же функции $f(x)$, определенные на некотором промежутке, отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.*

Прибавляя к какой-либо первообразной $F(x)$ все возможные постоянные значения С, можно получить все первообразные для данной функции $f(x)$, т.е. $F(x) + C$ - это есть совокупность всех первообразных для функции $f(x)$.

Общее выражение для всех первообразных данной непрерывной функции $f(x)$ называется ***неопределенным интегралом*** от этой функции и обозначается $\int f(x)dx = F(x) + C$, где

$f(x)$ - подынтегральная функция; $f(x)dx$ - подынтегральное выражение;

$F(x)$ - первообразная для $f(x)$; С - постоянная интегрирования;

x – переменная интегрирования; $\int$ - знак интеграла.

Действие нахождения первообразной для функции $f(x)$ называется ***интегрированием*** данной функции.

Основные свойства неопределенного интеграла

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad F'(x) = f(x)$$

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции: $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

На этом свойстве основывается проверка правильности нахождения неопределенного интеграла.

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению: $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен самой этой функции с точностью до постоянного слагаемого: $\int d\left(F\left(x\right)\right) = F\left(x\right) + C$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла: $\int A \cdot f\left(x\right)dx = A\int f\left(x\right)dx$, $A \neq 0$

5. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме интегралов от каждой функции: $\int\left(f_1\left(x\right) \pm f_2\left(x\right)\right)dx = \int f_1\left(x\right)dx \pm \int f_2\left(x\right)dx$

6. Свойство *инвариантности*: всякая формула интегрирования сохраняет свой вид при подстановки вместо **x** любой дифференцируемой функции от **x.**

Если $\int f\left(x\right)dx = F\left(x\right) + C$ и $u = \varphi\left(x\right)$, то $\int f\left(u\right)du = F\left(u\right) + C$. На этом свойстве основан метод непосредственного интегрирования.

Таблица основных интегралов

1. $\int dx = x + C$	11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
2. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad , n \neq -1$	12. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\|tg(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\right\| + C$
3. $\int \frac{du}{u} = \ln\|u\| + C$	13. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\|tg\,\frac{x}{2}\right\| + C$
4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$	14. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C$
5. $\int e^u du = e^u + C$	15. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{u-a}{u+a}\right\| + C$
6. $\int \mathrm{cos}u\,du = \mathrm{sin}u + C$	16. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$
7. $\int \mathrm{sin}u\,du = -\mathrm{cos}u + C$	17. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\frac{u}{a} + C$
8. $\int \mathrm{tg}u\,du = -\ln\|\mathrm{cos}u\| + C$	18. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left\|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\| + C$
9. $\int \mathrm{ctg}u\,du = \ln\|\mathrm{sin}u\| + C$	
10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	

Все формулы данной таблицы можно проверить путем дифференцирования, так как интегрирование есть действие обратное дифференцированию.

$$\int \mathrm{ctgudu} = \ln\left|\mathrm{sinu}\right| + C$$

$$\left(\ln\left|\mathrm{sinu}\right| + C\right)' = \frac{(\mathrm{sinu})'}{\mathrm{sinu}} = \frac{\mathrm{cosu}}{\mathrm{sinu}} = \mathrm{ctgu}$$

Данные интегралы принято называть табличными и основная задача интегрирования состоит в том, чтобы свести данный нам интеграл к табличному или нескольким табличным (если это возможно).

1.2 Непосредственное интегрирование функций

1. *Интегрирование по таблице.*

Заключается в прямом использовании табличных интегралов.

2. *Интегрирование разложением подынтегральной функции на сумму функций.*

Этот метод основан на пятом свойстве интегралов: интеграл алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций.

3. *Непосредственное интегрирование.*

\- Интегрирование путем подведения функции под знак дифференциала. Основан на свойстве инвариантности формулы неопределенного интеграла.

$\int f(x)dx = F(x) + C$, если $u = \varphi(x)$, то $\int f(u)du = F(u) + C$

\- Добавление постоянного слагаемого под знак дифференциала. При любой постоянной **a** будет выполняться равенство: $d(x+a) = dx$. Значит, и наоборот $dx = d(x+a)$ и поэтому $\int f(x)dx = \int f(x)d(x+a)$, т.е. под знак дифференциала можно ввести любое постоянное слагаемое.

\- Введение под дифференциал постоянного множителя. Если $a = \text{const}$, то $d(ax) = adx$. Отсюда при $a \neq 0$ - $dx = \frac{1}{a}d(ax)$. Следовательно, $\int f(x)dx = \frac{1}{a}\int f(x)d(ax)$, т.е. под знак дифференциала можно ввести любой постоянный множитель, разделив на него интеграл.

\- Интеграл от дроби, числитель которой является производной знаменателя, равен логарифму знаменателя:

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx = \int \frac{d(\varphi(x))}{\varphi(x)} = \ln|\varphi(x)| + C$$

Решение типовых примеров

Найти неопределенный интеграл

Пример 1. $\int \left(2x^3 - 3\sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{x^3} + 1\right)dx$

Решение.

$$\int\left(2x^3-3\sqrt[3]{x^2}+\frac{4}{x^3}+1\right)dx=2\int x^3dx-3\int x^{2/3}dx+4\int x^{-3}dx+\int dx=$$

$$=2\cdot\frac{x^4}{4}-3\cdot\frac{x^{5/3}}{5/3}+4\cdot\frac{x^{-2}}{-2}+x+C=\frac{x^4}{2}-\frac{9}{5}\sqrt[3]{x^5}-\frac{2}{x^2}+x+C$$

Пример 2. $\int 3^x\cdot e^{2x}dx$

Решение.

$$\int 3^x\cdot e^{2x}dx=\int\left(3e^2\right)^x dx=\frac{\left(3e^2\right)^x}{\ln\left(3e^2\right)}+C$$

Пример 3. $\int\frac{\sin 2x}{4+\sin^2x}dx$

Решение.

$$\int\frac{\sin 2x}{4+\sin^2x}dx=\int\frac{2\sin x\cos x}{4+\sin^2x}dx=\int\frac{\left(4+\sin^2x\right)'}{4+\sin^2x}dx=\ln\left|4+\sin^2x\right|+C$$

Пример 4. $\int\frac{x+2}{x^2+4x+5}dx$

Решение.

$$\int\frac{x+2}{x^2+4x+5}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+4x+5\right)}{x^2+4x+5}=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4x+5\right|+C$$

Задания для решения в аудитории

Найти указанные интегралы:

1) $\int\left(5x^7-3\sqrt[5]{x^3}+\frac{3}{x^4}\right)dx$

2) $\int\left(x^7-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+2^x\right)dx$

3) $\int e^{-3x}dx$

4) $\int\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$

5) $\int(3-2x)^4dx$

1.3 Интегрирование методом подстановки

Пусть $\int f(x)dx$ не является табличным. Следует упростить подынтегральное выражение, введя новую переменную так, чтобы интеграл стал табличным.

$x=\varphi(t)$

$dx=\varphi'(t)dt$'

т.е. $\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt=\int f(\varphi(t))\cdot d(\varphi(t))=F(\varphi(t))+C$

После нахождения интеграла необходимо вернуться к первоначальной переменной **x**. Такой способ нахождения интеграла называется ***методом замены переменной*** или ***методом подстановки.***

Задача нахождения неопределённых интегралов от многих функций решается методом сведения их к одному из табличных интегралов. Этого можно достичь путём алгебраических тождественных преобразований подынтегральной функции или подведения части её множителей под знак дифференциала.

Подведение множителя под знак дифференциала

$dx=d(x+b), b-const$	$\sin xdx=-d(\cos x)$
$dx=\frac{1}{a}d(ax), a\neq 0$	$\cos xdx=d(\sin x)$

$dx=\frac{1}{a}d(ax+b), a\neq 0$	$\frac{1}{x}dx=d(\ln x)$
$xdx=\frac{1}{2}d(x^2)$	$\sin 2xdx=-\frac{1}{2}\cos 2x$
$xdx=\frac{1}{2}d(x^2+b)$	$\cos 2xdx=\frac{1}{2}\sin 2x$

Выбор удачной формулы (подстановки) для замены переменной имеет большое значение. Вместе с тем дать одно общее правило для выбора хорошей подстановки невозможно. Некоторые частные правила для важнейших типов интегралов даются в решениях типовых примеров.

Решение типовых примеров

Пример 1. Найти $\int x\sqrt{x-1}dx$

Замечание: В данном примере с первого взгляда не определить, что подвести под знак дифференциала, а поэтому сделаем подстановку, позволяющую избавиться от иррациональности. Обозначим $\sqrt{x-1}=t$. Эта подстановка приводит исходный интеграл к новому интегралу, сводящемуся к табличному.

Решение.

$$\int x\sqrt{x-1}dx=\left|\begin{array}{l}\sqrt{x-1}=t\\ x=t^2+1\\ dx=2tdt\end{array}\right|=\int\left(t^2+1\right)\cdot t\cdot 2tdt=2\int\left(t^4+t^2\right)dt=$$

$$=\frac{2}{5}t^5+\frac{2}{5}t^3+C=\frac{2}{5}\left(x-1\right)^{5/2}+\frac{2}{5}\left(x-1\right)^{3/2}+C$$

Если в подынтегральном выражении есть готовый дифференциал функции $f(x)$, то есть выражение $f'(x)dx$, то имеет смысл попробовать подстановку $t=f(x)$.

Пример 2. Найти $\int\sqrt[3]{1+\sin x}\cdot\cos xdx$

Решение. $\int\sqrt[3]{1+\sin x}\cdot\cos xdx=\left|\begin{array}{l}1+\sin x=t\\ \cos xdx=dt\end{array}\right|=\int t^{1/3}dt=\frac{t^{4/3}}{4/3}+C=\frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(1+\sin x\right)^4}+C$

Если под знаком интеграла стоит сложная функция $f(\varphi(x))$, то, как правило, используется подстановка $t=\varphi(x)$ (к примеру, если в подынтегральном выражении встречается функция $\sin\frac{1}{x}$, то стоит попробовать подстановку $t=\frac{1}{x}$, а если e^{-x^3}, то $t=-x^3$).

Задания для решения в аудитории

Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$

2) $\int e^{\cos x} \cdot \sin x dx$

3) $\int xe^{-x^2} dx$

4) $\int x\sqrt[5]{(5x^2-3)^7} dx$

5) $\int \frac{3^{arctg\, x}}{1+x^2} dx$

1.4 Интегрирование по частям

Метод интегрирования по частям основан на следующей формуле:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

где $u(x)$ и $v(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции.

Данная формула называется ***формулой интегрирования по частям.*** Применять её целесообразно, когда интеграл в правой части формулы более прост для нахождения, нежели исходный. Отметим, что в некоторых случаях формулу необходимо применять несколько раз.

Метод интегрирования по частям рекомендуется для нахождения интегралов от функций $x^k \cdot \sin\alpha x; x^k \cdot \cos\alpha x; x^k \cdot e^{\alpha x}; x^n \cdot \ln^k x; a^{\beta x}\sin\alpha x;$ $a^{\beta x}\cos\alpha x; \arcsin x; arctgx$ и т.д., где n, k - целые положительные постоянные, $\alpha, \beta \in R$, а также для отыскания некоторых интегралов от функций, содержащих обратные тригонометрические и логарифмические функции.

Основные типы интегралов, «берущихся» по частям

Тип	**Интеграл**	u	dv
I	$\int p(x)\cdot e^{\alpha x}dx$	$p(x)$	$e^{\alpha x}dx$
	$\int p(x)\cdot \sin\alpha x dx$	$p(x)$	$\sin\alpha x dx$
	$\int p(x)\cdot \cos\beta x dx$	$p(x)$	$\cos\beta x dx$
II	$\int p(x)\cdot \ln x dx$	$\ln x$	$p(x)dx$
	$\int p(x)\cdot \arcsin x dx$	$\arcsin x$	$p(x)dx$
	$\int p(x)\cdot \arccos x dx$	$\arccos x$	$p(x)dx$
III	$\int e^{\alpha x}\cdot \sin\alpha x dx$	$e^{\alpha x}$	$\sin\alpha x dx$
		$\sin\alpha x$	$e^{\alpha x}dx$
	$\int e^{\alpha x}\cdot \cos\beta x dx$	$e^{\alpha x}$	$e^{\alpha x}dx$
		$\cos\beta x$	$\cos\beta x dx$
	$\int \sin(\ln x)dx$	$\sin(\ln x)$	dx

Замечания:

1. Интегралы 1-го типа берутся **n**-кратным интегрированием, если $P(x)$ - многочлен **n**-й степени.
2. Под знаком интегралов 2-го типа стоят функции: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{arctg} x$, $\ln x$, от которых интеграл не существует.
3. Интегралы 3-го типа берутся по частям дважды, в результате чего получается исходный интеграл. Интегрирование прекращается, и из полученного выражения находят искомый интеграл, выражая его через все остальные члены.

Решение типовых примеров

Пример 1. Найти $\int x \cdot e^{-2x}dx$

Решение.

$$\int x\cdot e^{-2x}dx=\left|\begin{array}{l} x=u; e^{-2x}dx=dv \\ dx=dv; v=\int e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}+C;(C=0)\end{array}\right|=$$

$$=x\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)-\int\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)dx=-\frac{1}{2}x\cdot e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+C$$

Пример 2. Найти $\int x\cdot arctgxdx$

Решение.

$$\int x\cdot arctgxdx=\left|\begin{array}{l} u=arctgx; dv=xdx \\ du=\frac{dx}{1+x^2}; v=\frac{x^2}{2}\end{array}\right|=\frac{x^2}{2}\cdot arctgx-\frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{1+x^2}=$$

$$=\frac{x^2}{2}\cdot arctgx-\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1-1)dx}{1+x^2}=\frac{x^2}{2}\cdot arctgx-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\cdot arctgx-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}arctgx+C$$

Задания для решения в аудитории

Найти данные неопределённые интегралы:

1) $\int x^2\cdot\cos xdx$

2) $\int e^x\cdot\sin xdx$

3) $\int \left(x^2 - 2x + 5\right) \cdot e^{-x} dx$

4) $\int x \cdot \ln\left(x - 3\right) dx$

5) $\int x \cdot 2^{3x} dx$

1.5 Интегрирование рациональных функций

Рациональные функции. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие дроби.

Рациональной функцией называется функция, равная отношению двух многочленов. Рациональные функции иначе называются ***рациональными дробями.*** $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

Рациональная дробь называется ***правильной,*** если степень числителя меньше степени знаменателя.

Рациональная дробь называется ***неправильной***, если степень числителя больше или равна степени знаменателя.

Если дробь правильная, то можно начинать интегрирование.

Если дробь неправильная, то ее представляют в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, а правильную рациональную дробь, в свою очередь, представляют в виде суммы простейших (элементарных) дробей.

Теорема. *Всякую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, используя алгоритм Евклида деления многочлена на многочлен.*

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=M(x)+\frac{r(x)}{Q(x)}$$

Пример.

$$\frac{x^3+3x^2+x-1}{x-1}=x^2+4x+5+\frac{4}{x-1}$$

$$\begin{array}{r|l}
x^3+3x^2+x-1 & x-1 \\ \cline{2-2}
x^3-x^2 \qquad\qquad & x^2+4x+5 \\ \cline{1-1}
-\;4x^2+x-1 & \\
4x^2-4x \quad & \\ \cline{1-1}
-\;5x-1 & \\
5x-5 & \\ \cline{1-1}
4 &
\end{array}$$

4 – неделимый остаток

Всякую правильную дробь можно единственным образом разложить на простейшие (элементарные) дроби. Существует **3 типа элементарных дробей**:

1. $\dfrac{A}{x-a}$ - I тип; 2. $\dfrac{A}{(x-a)^n}$ - II тип; 3. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$ - III тип

Разложение правильной рациональной дроби на простейшие

1) Если знаменатель содержит различные линейные множители:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}$$

$A-?$
$B-?$
$C-?$

2) Если знаменатель содержит повторяющиеся линейные множители:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)^2(x-c)^3}=\frac{A}{x-a}+\frac{B_1}{(x-b)}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\frac{C_1}{x-c}+\frac{C_2}{(x-c)^2}+\frac{C_3}{(x-c)^3};$$

$A-?\quad B_1-?\quad B_2-?$

$C_1-?\quad C_2-?\quad C_3-?$

3) Если знаменатель правильной рациональной дроби содержит неразложимые квадратные трехчлены (с отрицательным дискриминантом):

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)\left(x^2+p_2x+q_2\right)}=\frac{Ax+B}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{Cx+Д}{x^2+p_2x+q_2}$$

Интегрирование простейших дробей.

Интеграл от простейшей дроби:

1) I типа: $\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{1}{x-a}dx=A\ln|x-a|+C$

2) II типа: $\int\frac{A}{(x-a)^n}dx=A\int(x-a)^{-n}d(x-a)=A\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1}+C$

3) III типа (Д < 0)

В знаменателе выделим полный квадрат:

$$x^2+px+q=\left(x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}\right)-\frac{p^2}{4}+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2$$

Подставим полученное выражение в интеграл 3го типа:

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=A\int\frac{x}{x^2+px+q}dx+B\frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{1}{2}A\int\frac{(2x+p)-p}{x^2+px+q}dx+$$

$$+B\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2}=\frac{1}{2}A\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+\left(B-\frac{p}{2}A\right)\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}A\ln\left|x^2+px+q\right|+\left(B-\frac{p}{2}A\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C$$

Метод неопределенных коэффициентов

(для нахождения значений A, B, C…)

Это один из наиболее распространенных методов определения коэффициентов A, B, C…. в разложении правильной рациональной дроби на простейшие.

<u>Сущность метода</u> состоит в сравнении коэффициентов при одинаковых степенях переменной **x** числителей дробей.

Для определения числителя правой части простейшие дроби приводят к общему знаменателю и числитель полученной новой дроби приравнивают к числителю подынтегральной дроби. Получится система «n» уравнений с «n» неизвестными A, B, C…, которая имеет единственное решение, так как разложение правильной рациональной дроби на простейшие всегда возможно и единственно.

Замечания: 1) Если знаменатель правильной рациональной дроби разлагается только на линейные множители вида $(x-a)(x-b)(x-c)$, то можно применять **метод частных значений** для нахождения коэффициентов A, B, C…, придавая **x** значения $x=a;\ x=b;\ x=c$

Пример. $\dfrac{2x^2+10x-18}{(x-1)(x+2)(x-3)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{x-3}$

$$2x^2+10x-18=A(x+2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x+2)$$

$$\begin{array}{r|ll} x=1 & -6=A\cdot 3(-2) & A=1 \\ x=-2 & -30=B(-3)(-5) & B=-2 \\ x=3 & 30=C\cdot 2\cdot 5 & C=3 \end{array}$$

2) Во многих примерах удобно применять комбинированный метод: вместе использовать метод частных значений и метод неопределенных коэффициентов.

Решение типовых примеров

Пример 1. Найти $\int\dfrac{3x-2}{x^2+4x+13}dx$

Решение. Т.к. $x^2+4x+13=(x+2)^2+9$, то:

$$\int\frac{3x-2}{x^2+4x+13}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x+4-4-4/3}{(x+2)^2+9}dx=\frac{3}{2}\left(\int\frac{2x+4}{(x+2)^2+9}dx-\int\frac{(4+4/3)dx}{(x+2)^2+9}\right)=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{2x+4}{(x+2)^2+9}dx-8\int\frac{dx}{(x+2)^2+9}=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+4x+13\right|-8\cdot\frac{1}{3}arctg\,\frac{x+2}{3}+C$$

Замечание: Если в интеграле квадратный трёхчлен имеет вид ax^2+bx+c $(a\neq 0)$, то для отыскания этого интеграла коэффициент a в знаменателе выносят за скобки: $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}\right)$

Пример 2. Найти $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx$

Решение.

$$\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx = \frac{3}{2}\int \frac{(2x-4)+\left(4-\frac{2}{3}\right)}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{\sqrt{x^2-4x+8}} - 5\int \frac{dx}{(x-2)^2+4} =$$

$$= 3\sqrt{x^2-4x+8} - 5\ln\left|x-2+(x-2)^2+4\right| + C$$

Пример 3. Найти $\int \frac{3x+5}{\left(x^2+2x+5\right)^2}dx$

Решение.

$$\int \frac{3x+5}{\left(x^2+2x+5\right)^2}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+2-2+\frac{10}{3}}{\left(x^2+2x+5\right)^2}dx = \frac{3}{2}\int \frac{d\left(x^2+2x+5\right)}{\left(x^2+2x+5\right)} + 2\int \frac{dx}{\left((x+1)^2+4\right)^2} =$$

$$= -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2+2x+5} + 2\left(\frac{x+1}{8\left((x+1)^2+4\right)} + \frac{1}{8}\int \frac{dx}{4+(x+1)^2}\right) =$$

$$= -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2+2x+5} + \frac{1}{4}\cdot\frac{x+1}{x^2+2x+5} + \frac{1}{8}arctg\,\frac{x+1}{2} + C$$

Пример 4. Найти $\int \frac{2x-3}{x(x-1)(x-2)}dx$

Решение.

В соответствии с формулой разложение на элементарные дроби имеет вид:

$$\int \frac{2x-3}{x(x-1)(x-2)}dx = \int\left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}\right)dx \qquad (1)$$

Если привести дроби из данного разложения к общему знаменателю, то он совпадает со знаменателем исходной подынтегральной функции, а числители подынтегральной функции в левой и правой частях формулы (1) будут тождественно равными, то есть:

$$2x-3 = A(x-1)\cdot(x-2) + Bx\cdot(x-2) + C(x-1) \qquad (2)$$

Найдём коэффициенты *A, B, C* ***методом неопределённых коэффициентов.***

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях тождества (2), получаем систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{l|l} x^2 & 0 = A+B+C \\ x^1 & 2 = -3A-2B-C \\ x^0 & -3 = 2A \end{array}\right\}, \text{ решение которой: } \begin{cases} -3 = 2A; \\ -1 = -B; \\ 1 = 2C \end{cases} \quad \begin{cases} A = -\frac{3}{2} \\ B = 1 \\ C = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Подставив в равенство (1) найденные значения коэффициентов, окончательно имеем:

$$\int \frac{2x-3}{x(x-1)(x-2)}dx = \int \left(-\frac{3/2}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1/2}{x-2} \right) dx = -\frac{3}{2}\ln|x| + \ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x-2| + C$$

Задания для решения в аудитории

Найти данные неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$

2) $\int \frac{2x+7}{x^2+x-2}dx$

3) $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-6x+18}}dx$

4) $\int \frac{3x^2+2x-3}{x^3-x}dx$

$$5)\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)}dx$$

$$6)\int \frac{2x^3-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$$

$$7)\int \frac{x^5-x^3+1}{x^2-x}dx$$

1.6 Интегрирование тригонометрических выражений

Для отыскания интегралов вида:

$$\int \sin mx \cdot \cos nxdx; \int \sin mx \cdot \sin nxdx; \int \cos mx \cdot \cos nxdx$$

используют следующие формулы:

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}\left(\sin\left(m+n\right)x + \sin\left(m-n\right)x\right)$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}\left(\cos\left(m-n\right)x - \cos\left(m+n\right)x\right)$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}\left(\cos\left(m-n\right)x + \cos\left(m+n\right)x\right)$$

При нахождении интегралов вида $\int \cos^m x \cdot \sin^n dx$ возможны следующие случаи:

1) одно из чисел m или n - нечётное, например $m = 2k+1$. Тогда:

$$\int \cos^m x \cdot \sin^n dx = \int \cos^{2k} x \cdot \sin^n x \cdot \cos xdx = \int \left(1-\sin^2 x\right)^k \cdot \sin^n xd\left(\sin x\right),$$

то есть получим интегралы от степенных функций;

2) оба числа m и n - чётные. Тогда рекомендуется использовать формулы, понижающие степень тригонометрических функций:

$$2\cos^2 \alpha x = 1 + \cos 2\alpha x; \quad 2\sin^2 \alpha x = 1 - \cos 2\alpha x$$

Интегралы вида $\int R\left(\cos x; \sin x\right),$ где R - рациональная функция, приводятся к интегралам от рациональных функций новой переменной t с помощью ***универсальной тригонометрической подстановки*** $tg\frac{x}{2} = t$.

В этом случае:

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

В случае, когда имеет место тождество:

$$R\left(-\cos x; -\sin x\right) \equiv R\left(\cos x; \sin x\right),$$

для приведения подынтегральной функции к рациональному виду можно применять упрощённую подстановку $tgx = t$.

При этом: $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}; \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}; dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

Если тригонометрические функции $\sin x$ и $\cos x$ входят в выражение функции R только в чётных степенях, то гораздо быстрее к цели ведёт подстановка $t = tgx$, при этом: $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}; \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}; dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

С помощью этой же подстановки берутся интегралы вида $\int R(tgx)dx$.

Решение типовых примеров

Пример 1. Найти $\int \cos(2x-1)\cdot\cos(3x-5)\,dx$

Решение.

$$\int \cos(2x-1)\cdot\cos(3x-5)\,dx = \frac{1}{2}\int\left(\cos(x+6)+\cos(5x+4)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos(x+6)d(x+6) + \frac{1}{10}\int\cos(5x+4)\,d(5x+4) = \frac{1}{2}\sin(x+6) + \frac{1}{10}\sin(5x+4)+C$$

Пример 2. Найти $\int \cos^7 x\cdot\sin^3 x dx$

Решение.

$$\int \cos^7 x\cdot\sin^3 xdx = \int\cos^7 x\cdot\sin^2 x\cdot\sin xdx = -\int\cos^7 x\cdot\left(1-\cos^2 x\right)d(\cos x) =$$

$$= -\int\cos^7 xd(\cos x) + \int\cos^9 xd(\cos x) = -\frac{1}{8}\cos^8 x + \frac{1}{10}\cos^{10}x + C$$

Пример 3. Найти $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

Решение.

$$\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \left|\begin{array}{ll} \sin x = \frac{2t}{1+t^2} & \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} & tg\frac{x}{2} = t\end{array}\right| = \int\frac{\frac{2dx}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int\frac{dt}{1+t} =$$

$$= \ln|1+t| + C = \ln\left|1+tg\frac{x}{2}\right| + C$$

Задания для решения в аудитории

Найти данные неопределенные интегралы:

1) $\int \sin^2 x\cdot\cos^3 xdx$

2) $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^2 x}$

3) $\int \sin^2 3x dx$

4) $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$

ГЛАВА 2 ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.1 Определенный интеграл и его основные свойства

Определение 3. Если существует конечный предел интегральной суммы при $\lambda \to 0$, который не зависит от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на элементарные отрезки и от выбора точек ξ_i в каждом из них, то этот предел называется определённым интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$, а сама функция называется интегрируемой подынтегральной функцией на $[a;b]$, то есть $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \vartriangle x_i$.

При этом число a называется нижним пределом интегрирования, b - верхним пределом, x - переменной интегрирования.

Основные свойства определенного интеграла

1) Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла, т.е.:

$$\int\limits_a^b Af(x)\,dx = A\int\limits_a^b f(x)dx;$$

2) Определенный интеграл от суммы нескольких функций равен сумме интегралов:

$$\int\limits_a^b \left(f_1(x) \pm f_2(x) \right) dx = \int\limits_a^b f_1(x)\,dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)\,dx;$$

3) Свойство аддитивности.

Если отрезок $[a;b]$ разбит на две части $[a;c]$ и $[c;b]$, то:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx;$$

4) Если подынтегральная функция в интервале интегрирования не меняет знака, то интеграл представляет собой число того же знака, что и функция:

$$\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0; \quad \int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$$

5) Если на интервале $[a;b]$ две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют неравенству $f(x) \le \varphi(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \le \int\limits_a^b \varphi(x)dx$.

2.2 Правила вычисления определённого интеграла. Формула Ньютона-Лейбница

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и функция $F(x)$ - некоторая первообразная для $f(x)$ на $[a;b]$, то определённый интеграл от функции $f(x)$ на $[a;b]$ равен приращению первообразной $F(x)$ на этом отрезке, то есть:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (1)$$

Нахождение определённых интегралов с использованием формулы Ньютона-Лейбница осуществляется в два шага:

- на первом шаге, используя технику нахождения неопределённого интеграла, находят некоторую первообразную $F(x)$ для $f(x)$;

- на втором подсчитывают разность значений первообразной в точках a и b. Разность этих значений первообразной принято обозначать символом $F(x)\Big|_a^b$, то есть:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Следует подчеркнуть, что при применении формулы Ньютона-Лейбница можно использовать любую первообразную $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$, например, имеющую более простой вид при $c = 0$.

Интегрирование по частям

Пусть $u = u(x); v = v(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции на $[a;b]$, тогда справедливо следующее равенство:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

Интегрирование чётной и нечётной функции

Если $f(x)$ - чётная функция, то есть $f(-x) = f(x)$, то:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

Если $f(x)$ - нечётная функция, то есть $f(-x) = -f(x)$, то: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

Решение типовых примеров

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

Решение. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = tg\frac{\pi}{4} - tg\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} x \cdot \cos 2x dx$

Решение.

$$\int\limits_0^{2\pi} x \cdot \cos 2x dx = \left| \begin{array}{l} u = x; du = dx \\ dv = \cos 2x dx; v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right| = \frac{1}{2} x \cdot \sin 2x \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \sin 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2} x \cdot \sin 2x \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4}\cos 2x \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \sin 4\pi - \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \sin 0 + \frac{1}{4} \cdot \cos 4\pi - \frac{1}{4} \cdot \cos 0 =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 1 - \frac{1}{4} \cdot 1 = 0$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x dx$.

Решение. Функция $f(x) = \sin^2 x$ - чётная, так как:

$$f(-x) = \sin^2(-x) = \left[\sin(-x)\right]^2 = \left[-\sin x\right]^2 = \sin^2 x = f(x).$$

Поэтому:

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x dx = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x dx = 2 \cdot \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos 2x) dx = \left(x - \frac{1}{2} \cdot \sin 2x \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^2 \cdot \arcsin x}{\sqrt{1 + x^2}} dx$.

Решение.

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 \cdot \arcsin(-x)}{\sqrt{1 + (-x)^2}} = -\frac{x^2 \cdot \arcsin x}{\sqrt{1 + x^2}} = -f(x)$$

Так как подынтегральная функция $f(x)=\dfrac{x^2\cdot\arcsin x}{\sqrt{1+x^2}}$ - нечётная, поэтому $\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{x^2\cdot\arcsin x}{\sqrt{1+x^2}}dx=0$.

Задания для решения в аудитории

Вычислить интегралы

1) $\int\limits_{2}^{3}\left(4x^2+\dfrac{1}{x^3}\right)dx$

2) $\int\limits_{0}^{2}3e^{\frac{x}{4}}dx$

3) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{dx}{1+x^2}$

4) $\int\limits_{1}^{2}e^{2x}\cdot\left(2+\dfrac{x^3}{e^{2x}}\right)dx$

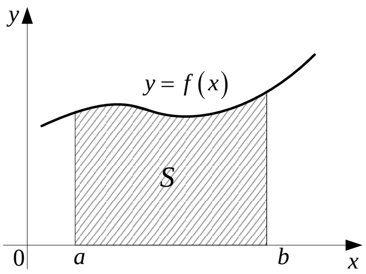
5) $\int\limits_{-3}^{0}\dfrac{dx}{\sqrt{25+3x}}$

$$6)\int_{3}^{4}\frac{dx}{x^2-3x+2}$$

$$7)\int_{-1}^{0}\left(x^2+2x+1\right)\sin 3x dx.$$

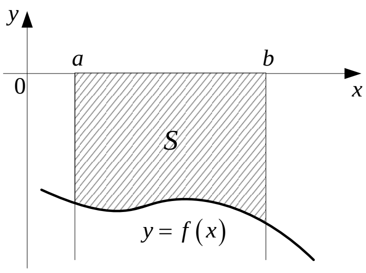
2.3 Приложения определенного интеграла
2.3.1 Вычисление площадей плоских фигур

1. Если на $[a;b]$ функция $f(x)\ge 0$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a; x=b$ равна:



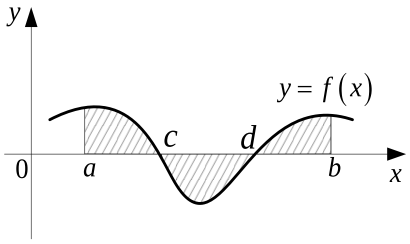
$$S=\int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

2. Если на $[a;b]$ функция $f(x)\le 0$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной снизу кривой $y=f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a; x=b$, равна:



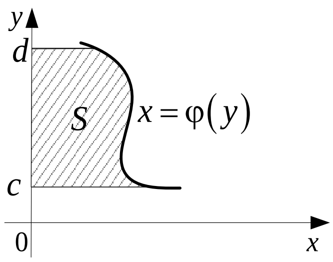
$$S=-\int_a^b f(x)dx \qquad (2)$$

3. Если функция $f(x)$ конечное число раз меняет знак на $[a;b]$, то интеграл по всему отрезку $[a;b]$ разбиваем на сумму интегралов по частичным отрезкам. Площадь такой криволинейной трапеции соответственно равна:



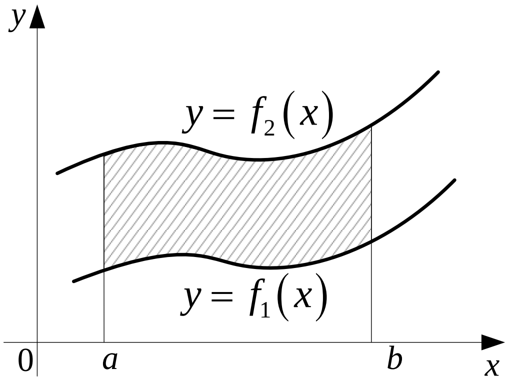
$$S=\int_a^c f(x)dx-\int_c^d f(x)dx+\int_d^b f(x)dx \qquad (3)$$

4. Если основанием криволинейной трапеции является отрезок $[c;d]$ оси Oy, тогда площадь такой фигуры равна:



$$S=\int_c^d \varphi(y)dy \qquad (4)$$

5. Пусть на отрезке $[a;b]$ заданы непрерывные функции $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ такие, что $f_2(x)\ge f_1(x)$. Тогда площадь фигуры, заключённой между кривыми $y=f_2(x)$ и $y=f_1(x)$ на отрезке $[a;b]$, вычисляется по формуле:

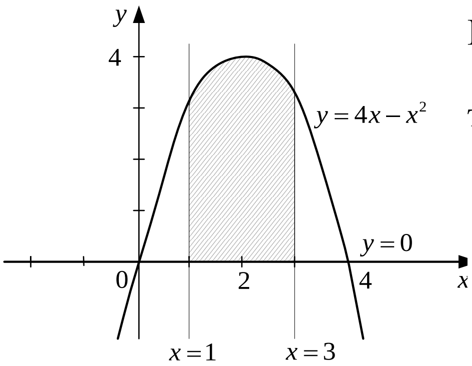


$$S=\int_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx \qquad (5)$$

Решение типовых примеров

Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=4x-x^2$; $x=1; x=3$ и осью Ox.

Решение.



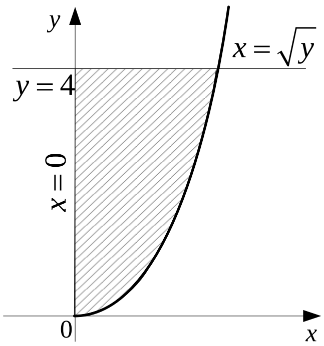
Воспользуемся формулой $S=\int_a^b f(x)dx$, тогда $a=1; b=3; f(x)=4x-x^2$, следовательно,

$$S=\int_1^3\left(4x-x^2\right)dx=\left.\left(2x^2-\frac{x^3}{3}\right)\right|_1^3=$$

$$=18-9-2+\frac{1}{3}=7+\frac{1}{3}=\frac{22}{3}(кв.ед.)$$

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x=\sqrt{y}$; $x=0; y=4$.

Решение.



Воспользуемся формулой $S=\int_c^d \varphi(y)dy$, где

$c=0; d=4; \varphi(y)=\sqrt{y}$

Тогда $S=\int_0^4\sqrt{y}dy=\left.\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right|_0^4=\frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}}-0\right)=\frac{16}{3}(кв.ед.)$

Задания для решения в аудитории

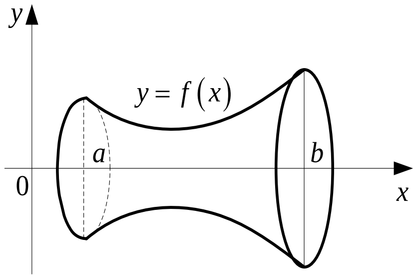
Вычислить площади фигур, ограниченных заданными линиями:

1) $y=4-x^2; y=x^2-2x$

2) $y = x; y = 2 - x^2$

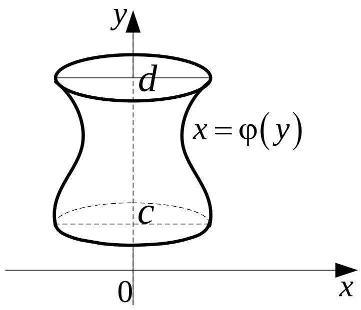
2.3.2 Вычисление объёмов тел вращения

1. Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y = f(x)$ и прямыми $y = 0; x = a; x = b$, вращается вокруг оси Ox, то объём тела вращения вычисляется по формуле:



$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx \qquad (6)$$

2. Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $x = \varphi(y)$ и прямыми $y = c; y = d; x = 0$, вращается вокруг оси Oy, то:



$$V_y = \pi\int_c^d \varphi^2(y)\,dy \qquad (7)$$

3. Если фигура, ограниченная кривыми $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ $\left(0 \le f_1(x) \le f_2(x)\right)$ и прямыми $x = a; x = b$, вращается вокруг оси Ox, то объём тела вращения:

$$V_x = \pi\int_a^b \left(f_2^2(x) - f_1^2(x)\right)dx \qquad (8)$$

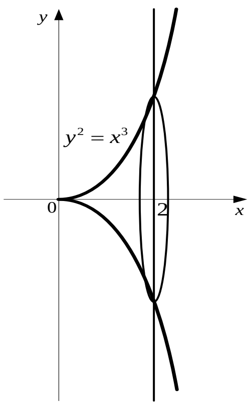
4. Если фигура ограничена кривыми $x = \varphi_1(y)$ и $x = \varphi_2(y)$ $\left(0 \le \varphi_1(y) \le \varphi_2(y)\right)$ и прямыми $y = c; y = d$ вращается вокруг оси Oy, то объём тела вращения:

$$V_y = \pi\int_c^d \left(\varphi_2^2(y) - \varphi_1^2(y)\right)dy \qquad (9)$$

Решение типовых примеров

Пример 1. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривой $y^2 = x^3$ и прямой $x = 2$.

Решение.



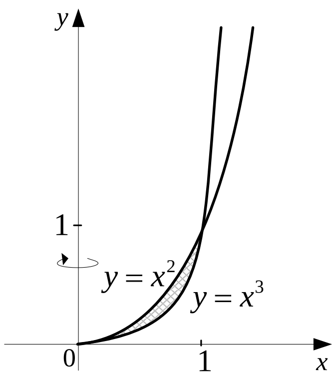
Применяя формулу $V_x = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx$,

найдём:

$$V_x = \pi\int_0^2 x^3 dx = \pi\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^2 = \frac{16}{4}\pi = 4\pi(\text{куб.ед.})$$

Пример 2. Найти объём тела, полученного от вращения вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = x^2; y = x^3$

Решение.



Воспользуемся формулой:

$$V_y=\pi\int_c^d\left(\varphi_2^2(y)-\varphi_1^2(y)\right)dy,$$

где $c=0; d=1$, $\varphi_1(y)=\sqrt{y};\varphi_2(y)=\sqrt[3]{y}$

Тогда:

$$V_y=\pi\int_0^1\left(\sqrt[3]{y^2}-\sqrt{y^2}\right)dy=\pi\left(\frac{3y^{\frac{5}{3}}}{5}-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\pi\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{10}(куб.ед.)$$

Задания для решения в аудитории

Найти объёмы тел, образованных вращением вокруг оси Ox фигур, ограниченных линиями:

1) $y=x^2-3x; y=2x-6$

2) $y=x^2; y=\sqrt{x}$

Найти объём тел, образованных вращением вокруг оси Oy фигур, ограниченных линиями:

1) $y = x^2 + 1; y = 0; x = 1; x = 2$

2) $y = \frac{4}{x}; y = 0; x = 1; x = 4$

ГЛАВА 3 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

3.1 Основные понятия

Уравнение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию и её производные или дифференциалы различных порядков называется обыкновенным дифференциальным уравнением.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в данное уравнение. Например, уравнение $y'\sin x + y\cos x = 1$ - первого порядка; $\frac{d^2y}{dx^2} = \sin x$ - второго порядка; $y''' = xy$ - третьего порядка и т.д.

Решением дифференциального уравнения называется функция y=y(x), удовлетворяющая этому уравнению. Процесс нахождения решения называется интегрированием дифференциального уравнения.

Если решение уравнения получено в неявном виде $\varphi(x, y) = 0$, то оно обычно называется интегралом уравнения.

Задача Коши для уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{n-1}) \tag{1}$$

ставится следующим образом. Среди всех решений уравнения (I) требуется найти решение y=y(x), для которого функция y(x) вместе со своими производными до (n-I)-го порядка включительно принимает заданные значения $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{n-1}$, при заданном значении x_0 аргумента x, т.е.

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_0, \\ .... \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1} \end{cases} \tag{2}$$

где $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{n-1}$ - заданные числа.

Условия (2) называются начальными условиями решения *y=y(x)*, а само это решение - частным решением уравнения (1), удовлетворяющим начальным условиям (2).

Общее решение уравнения (1) - это решение вида $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, зависящее от произвольных постоянных C_1, C_2, …, C_n, которые можно подобрать таким образом, чтобы удовлетворить любой системе начальных условий.

Частное решение уравнения (1) может быть получено из общего решения при некоторых числовых значениях произвольных постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$

Геометрически общее решение (общий интеграл) изображается семейством интегральных кривых, а частное решение (частный интеграл) - одной из этих интегральных кривых.

3.2 Дифференциальные уравнения I порядка

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$F(x,y,y')=0 \text{ или } y'=f(x,y)$$

где y - неизвестная функция; x - независимая переменная.

Общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения I порядка имеет вид $\varphi(x,C)=0$ или Ф (x, y, c) = 0 - соответственно. Для получения частного решения (частного интеграла), удовлетворяющего заданному начальному условию $y(x)=y_0$, надо найти соответствующее значение C = C_0 , подставляя в общее решение (общий интеграл) значения x_0 и y_0 . Будем иметь $y=\varphi(x,C_0)$ или Ф (x, y, c) = 0

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными имеет вид

$$M_1(x)N_1(y)dx+M_2(x)N_2(y)dy=0 \tag{1}$$

Поделив обе части уравнения (I) на $N_1(y)M_2(x)$ получим уравнение

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=0 \tag{2}$$

в котором переменные разделены. Общий интеграл уравнения находится почленным интегрированием:

$$\int\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\int\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=C$$

Однородные уравнения I порядка

Уравнение вида $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ называется однородным, если P(x,y) и Q(x,y) - однородные функции одного измерения. Функция F(x,y) называется однородной измерения m , если $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^m f(x,y)$.

Оно приводится к виду $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$. Где $f\left(\frac{y}{x}\right)$- однородная функция нулевой степени однородности. Однородное уравнение с помощью подстановки $\left(\frac{y}{x}\right)=u$ или $y=ux$, $(y'=u'v+uv')$, приводится к уравнению с разделяющимися переменными по отношению к новой неизвестной функции *u*. При этом $\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u$, или $dy=xdu+udx$.

Интегрируя получившееся уравнение с разделяющимися переменными, и, заменяя затем $u=\left(\frac{y}{x}\right)$, находим искомое общее решение (общий интеграл) данного однородного уравнения.

Линейные уравнения I порядка

Дифференциальное уравнение называется линейным, если оно линейно (т.е. первой степени) относительно искомой функции y и её производной y'. Общий вид линейного уравнения

$$y'+P(x)y=Q(x) \qquad (3)$$

Линейное уравнение сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными, если искомую функцию y заменить произведением двух вспомогательных функций u и v, т.е. положить $y=uv$. Тогда $\frac{dy}{dx}=v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}$ и данное уравнение (3) примет вид:

$$v\frac{du}{dx}+u\left[\frac{dv}{dx}+P(x)v\right]=Q(x) \qquad (4)$$

Пользуясь тем, что одну из вспомогательных функций, например v можно выбрать произвольно, подберем ее так, чтобы выражение в квадратных скобках обратилось в нуль, т.е. в качестве v возьмем одно из частных решений $v=v(x)$ уравнения с разделяющимися переменными

$$\frac{dv}{dx}+P(x)v=0$$

Подставлял выражение $v=v(x)$ в уравнение (4), получаем уравнение относительно функции u:

$$v\frac{du}{dx}=Q(x), \qquad (5)$$

которое также является уравнением с разделяющимися переменными. Найдя общее решение уравнения (5) в виде $u=u(x,C)$ получим общее решение линейного уравнения (3):

$$y=u(x,C)\cdot v(x)$$

Уравнение Бернулли

Уравнение вида $y'+P(x)y=Q(x)y^n$, где P и Q функции, зависящие только от x и n-рациональное число , называется уравнением Бернулли.

При $n=0$ имеем линейное уравнение. Уравнение Бернулли решается также подстановкой $y=uv$.

Решение типовых примеров

Пример 1. Найти частное решение уравнения $y'=(y+1)ctgx$, удовлетворяющее условию $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$.

Решение. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Учитывая, что $y'=\frac{dy}{dx}$, умножим обе части уравнения на dx и разделим на множитель *(y+1)*. Получим уравнение с разделенными переменными: $\frac{dy}{y+1}=ctgxdx.$

Интегрируя обе части уравнения и беря произвольную постоянную в вида $\ln C$, получим $\ln|y+1|=\ln|\sin x|+\ln C.$

Потенцируя, находим общее решение: $y=C\sin x-1.$

Найдем значение С, соответствующее начальным условиями: $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$,

$2=C\sin\frac{\pi}{2}-1$, откуда С = 3. Подставим С = 3 в формулу общего решения. Получим, $y=3\sin x-1$ есть частное решение, удовлетворяющие заданным начальным условиям.

Пример 2. Найти общий интеграл уравнения $(x^2+2xy)dx+xydy=0$

Решение. Здесь $P=x^2+2xy$, $Q=xy$. Функции однородные второго измерения. Введем подставку $y=ux$, тогда $dy=xdu+udx$.

Данное уравнение примет вид: $(x^2+2x^2u)dx+ux^2(xdu+udx)=0$, или $(x^2+2x^2u+u^2x^2)dx+ux^3du=0$.

Разделяя переменные и интегрируя, имеем: $\frac{dx}{x}+\frac{udu}{(u+1)^2}=0$,

$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{udu}{(u+1)^2}=C$, $\ln|x|+\int\frac{u+1-1}{(u+1)^2}du=C$, $\ln|x|+\ln|u+1|+\frac{1}{u+1}=C$.

Возвращаясь к прежней неизвестной функции y заменой "u" на $\frac{y}{x}$,

получаем $\ln|x|+\ln\left|\frac{y}{x}+1\right|+\frac{1}{\frac{y}{x}+1}=C$, $\ln\left|x(\frac{y}{x}+1)\right|+\frac{x}{x+y}=C$.

Пример 3. Решить уравнение $y'-yctgx=\sin x$.

Решение. Данное уравнение является линейным, так как оно содержит искомую функцию y и её производную y' в первой степени и не содержит их произведений.

Применяем подстановку $y = uv$, где u и v - некоторые неизвестные функции аргумента x. Если $y = uv$, то $y' = (uv)' = u'v + uv'$ и данное уравнение примет вид $u'v + uv' - uvctgx = \sin x$ или $u'v + u\left(v' - vctgx\right) = \sin x$.

Так как искомая функция представлена в виде произведения двух других неизвестных функций, то одну из них можно выбрать произвольно. Выберем функцию v так, чтобы выражение, стоящее в круглых скобках левой части равенства, обращалось в нуль. Тогда данное уравнение сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными:

I) $v' - vctgx = 0$

$$\frac{dv}{dx} = vctgx$$

$$\frac{dv}{v} = ctgxdx$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int ctgxdx$$

$$\ell nv = \ell n \sin x$$

$$v = \sin x$$

II) $u'v = \sin x$

$$\frac{du}{dx}\sin x = \sin x$$

$$du = dx$$

$$\int du = \int dx$$

$$u = x + c$$

Т.к. $y = uv$, то $y = (x + c)\sin x$ - общее решение.

Пример 4. Найти общий интеграл уравнения: $x^2y^2y' + xy^3 = 1$

Решение. Разделив обе части уравнения на x^2y^2, убеждаемся, что данное уравнение является уравнением Бернулли: $y' + \frac{y}{x} = \frac{y^{-2}}{x^2}$

Заменяя функцию y по формуле $y=uv$, имеем $y' = (uv)' = u'v + uv'$, $u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{1}{x^2u^2v^2}$ или $u'v + v'u + \frac{uv}{x} = \frac{1}{x^2u^2v^2}$

Отсюда получаем два уравнения с разделяющимися переменными:

1) $\left(v' + \frac{v}{x}\right) = 0$ и 2) $u'v = \frac{1}{x^2u^2v^2}$

Решая первое уравнение, находим v как простейший частный интеграл этого уравнения: $v = \frac{1}{x}$. Подставляя v во второе уравнение и решая его, находим u как общий интеграл этого уравнения: $\frac{u'}{x} = \frac{1}{u^2}$, $u^2du = xdx$, $\frac{u^3}{3} = \frac{x^2}{2} + \frac{C}{3}$, $u = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 + C}$. Следовательно, искомый общий интеграл данного уравнения $y = uv = \sqrt[3]{\frac{3}{2x} + \frac{C}{x^3}}$

Задания для решения в аудитории

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $(1+y^2)dx=(1+x^2)dy$

б) $y'=e^{x+y}$

2. Найти частные решение уравнения, удовлетворяющие указанным условиям:

а) $(xy^2+x)dx+(x^2y-y)dy=0$, если $y(0)=1$

б) $y'ctgx+y=2$, если $y(0)=-1$

3. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $(x+2y)dx-xdy=0$

б) $y^2 + x^2 y' = xyy'$

4. Найти частные решение уравнения, удовлетворяющие указанным условиям: $(2x - 3y)dx + xdy = 0$, если $y(1) = -1$

5. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $y' - \frac{2}{x} y = 2x^3$

б) $ydx + 2(x + y)dy = 0$

6. Найти частные решение уравнения, удовлетворяющие указанным условиям:

а) $y' - 2xy = 1$, если $y(0) = 0$

б) $xy' + y - e^x = 0$, если $y(a) = b$

7. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

$y' - 2xy = 3x^3y^2$

8. Найти частные решение уравнения, удовлетворяющие указанным условиям: $(1-x^2)y'+2xy = xy^2$, если $y(0)=0{,}5$

3.3 Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

Уравнение вида $y^n = f(x)$

Уравнение вида $y^n = f(x)$ решается последовательным - кратным интегрированием правой части. При каждом интегрировании имеем одно произвольное постоянное, а в окончательном результате $''n''$ произвольных постоянных.

Уравнения вида $F(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$, не содержащие неизвестную функцию в явном виде

Порядок такого уравнения можно понизить, полагая $y^{(n-1)} = P(x)$. Тогда $y^{(n)} = \dfrac{dp}{dx}$. В результате получим уравнение первого порядка $F(x, P, \dfrac{dp}{dx}) = 0$ относительно неизвестной функции P(x). Решая его, найдем p(x). Дальнейшее решение сводится к интегрированию уравнения типа рассмотренного выше $y^{(n-1)} = P(x)$.

Уравнение вида $F(y^{(n-2)}, y^{(n-1)}, y^{(n)} = 0$, $(n>2)$ не содержащее аргумент x в явном виде

Уравнения этого вида допускают понижение порядка, если положить $y^{(n-1)} = P$, а за новый аргумент принять $y^{(n-2)}$. Тогда $y^{(n)} = \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dp}{dy^{(n-2)}}$;

$$\frac{dy^{(n-2)}}{dx} = P\frac{dp}{dy^{(n-2)}}.$$

В результате получим уравнение первого порядка относительно неизвестной функции P и аргумента $y^{(n-2)}$: $F\left(y^{(n-2)}, P, P\cdot\frac{dp}{dy^{(n-2)}}\right)=0$

Дальнейшее решение сводится к интегрированию уравнения типа $y^{(n-1)}=P$.

Решение типовых примеров

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y'''=\frac{1}{x^3}$ и выделить частное решение, удовлетворяющее начальным условиям *y(1)=2, y'(1)=1/2, y''(1)=3/2.*
Решение. Последовательно интегрируя данное уравнение, имеем:

$$y''=\int\frac{dx}{x^3}=-\frac{1}{2x^2}+C_1,\ y'=\int\left(-\frac{1}{2x^2}+C_1\right)dx=\frac{1}{2x}+C_1x+C_2,$$

$$y=\int\left(\frac{1}{2x}+C_1x+C_2\right)dx=\frac{1}{2}\ln|x|+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3$$ - общее решение

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям. С этой целью найдем значения C_1, C_2 и C_3, подставляя $x=1, y=2, y'=\frac{1}{2}, y''=\frac{3}{2}$ в систему равенств:

$$\begin{cases} y''=-\frac{1}{2x^2}+C_1, \\ y'=\frac{1}{2x}+C_1x+C_2, \\ y=\frac{1}{2}\ln|x|+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3 \end{cases},\quad \begin{cases} \frac{3}{2}=-\frac{1}{2}+C_1, \\ \frac{1}{2}=\frac{1}{2}+C_1+C_2, \\ 2=\frac{1}{2}\ln 1+C_1\frac{1}{2}+C_2+C_3 \end{cases},$$

откуда $C_1=2$, $C_2=-2$, $C_3=3$.

Искомое частное решение получаем, подставляя найденные значения произвольных постоянных в формулу общего решения:

$$y=\frac{1}{2}\ln|x|+2\frac{1}{2}x^2-2x+3,\ \text{или}\ y=\frac{1}{2}\ln|x|+x^2-2x+3$$

Пример 2. Проинтегрировать уравнение $y'''=2(y''-1)ctgx$
Решение. I) Имеем уравнение вида $F(x,y'',y''')=0$. Положим $y''=P(x)$. Тогда $y'''=\frac{dp}{dx}$. Получаем уравнение первого порядка: $\frac{dp}{dx}=2(p-1)ctgx$. Оно является уравнением с разделяющимися переменными:

$$\int\frac{dp}{p-1}=2\int ctgx dx;\qquad \ln|p-1|=2\ln|\sin x|+\ln C_1;\qquad p-1=C_1\sin^2 x;$$

$p=1+C_1\sin^2 x$.

II) Вернемся к старой переменной $y''=1+C_1\sin^2 x$. Выполняя двукратное интегрирование, имеем

$$y' = \int (1 + C_1 \sin^2 x)dx = \int dx + \int C_1 \sin^2 x dx = x + C_1 \int \sin^2 x dx = x + C_1 \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx =$$

$$= x + C_1 \left(\frac{x}{2} - \frac{x}{4} \sin 2x \right) + C_2 = x \left(1 + \frac{C_1}{2} \right) - \frac{C_1}{4} \sin 2x + C_2 .$$

$$y = \int y' dx = \int \left[x \left(1 + \frac{C_1}{2} \right) - \frac{C_1}{4} \sin 2x + C_2 \right] dx = \frac{x^2}{2} \left(1 + \frac{C_1}{2} \right) + \frac{C_1}{8} \cos 2x + C_2 x + C_3$$

$$y = \frac{2 + C_1}{4} x^2 + \frac{C_1}{8} \cos 2x + C_2 x + C_3$$ - общее решение уравнения.

Пример 3. Найти частное решение уравнения $yy'' - (y')^2 = 0$, если y(0)=1, y'(0)=2.

Решение. Полагая $y' = p, y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$. Имеем: $yp \frac{dp}{dy} - p^2 = 0$, $p\left(y \frac{dp}{dy} - p \right) = 0$.

Приравнивая первый множитель нулю, получим простейшее уравнение p=0. Его решение y = C; $\frac{dy}{dx} = 0$.

Приравниваем к нулю второй множитель: $\left(y \frac{dp}{dy} - p \right) = 0$, $ydp - pdy = 0$ (уравнение с разделяющимися переменными). Разделим переменные $\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$.

Интегрируем: $\ln p = \ln y + \ln C_1$, $\ln p = \ln C_1 y$, $p = C_1 y$

Вернемся к старой переменной, т.е. вместо *p* подставим $\frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = C_1 y$; $\quad dy = C_1 y dx$ (1)

$\frac{dy}{y} = C_1 dx.$ Интегрируем $\ln y = C_1 x + C_2$.

Отсюда $y = e^{C_1 x + C_2}$ - общее решение исходного уравнения, (2)

Найдем частное решение, используя начальные условия: y(0)=1, y'(0)=2.

Подставим x=0, y=1, y'=2 уравнения (1) и (2), получим систему двух уравнений с двумя неизвестными C_1 и C_2. Очевидно, что $C_1=2$, а $C_2=0$.

При найденных значениях C_1 и C_2 получим искомое частное решение из общего: $y = e^{2x}$

Задания для решения в аудитории

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

б) $y''' = x + \sin x$

в) $x^2 y'' + xy' = 1$

г) $x^2 y'' = (y')^2$

д) $yy''+(y')^2=0$

ж) $yy''=(y')^3$

2. Найти частные решение уравнения, удовлетворяющие указанным условиям:
   а). $y''=-6x$, если $y(0)=0$ и $y'(0)=0$

б). $y''' = e^{-x}$, если $y(0) = 0$ и $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$

в). $xy'' - y' = e^{x}x^{2}$, если $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$

г). $yy'' + (y')^{2} = (y')^{3}$, если $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$

3.4 Однородные линейные уравнения 2 порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение вида $a_0y''+a_1y'+a_2y=0$ называется линейным однородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами a_0, a_1 и a_2. Чтобы найти общее решение этого уравнения, достаточно составить характеристическое уравнение: $a_0k^2+a_1k+a_2=0$.

В зависимости от значений корней характеристического уравнения, возможны различные случаи нахождения общего решения дифференциального уравнения.

№ п/п	Корни характеристического уравнения	Общее решение уравнения
1	Корни действительные и различные ($k_1 \neq k_2$)	$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$
2	Корни действительные и равные ($k_1=k_2=k$)	$y=e^{kx}(C_1+C_2x)$
3	Корни мнимые ($k=\alpha\pm i\beta$)	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

Решение типовых примеров

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''+2y'+2y=0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение, соответствующее заданному линейному однородному уравнению $k^2+2k+2=0$. Найдем его корни $k_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-2}=-1\pm i$. Корни мнимые.

Смотрим по таблице 1, строка 3: $\alpha=-1, \beta=1$. Общее решение будет следующим: $y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$.

Пример 2. Найти частное решение уравнения $y''+y'-2y=0$, удовлетворяющее начальным условиям: y(0)=3, y'(0)=0.

Решение. Вначале найдем общее решение. Характеристическое уравнение: $k^2+k-2=0$ имеет два различных действительных корня $k_1= -2$, $k_2 = 1$. Следовательно, $y=C_1e^{-2x}+C_2e^x$ - общее решение.

Дифференцируем обе части последнего равенства: $y'=-2C_1e^{-2x}+C_2e^x$

Подставив начальные условия, получим систему двух уравнений относительно произвольных постоянных C_1 и C_2:

$$\begin{cases} 3=C_1+C_2, \\ 0=-2C_1+C_2. \end{cases}$$

Решение системы дает: $C_1 = 1$ и $C_2 = 2$.

Следовательно, $y=e^{-2x}+2e^x$ - есть искомое частное решение.

3.5 Неоднородные линейные уравнения 2 порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение $a_0y''+a_1y'+a_2y=f(x)$ (1) называется неоднородным линейным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами a_0, a_1 и a_2. Структура общего решения такого уравнения определяется следующей теоремой:

Общее решение. У неоднородного уравнения предоставляется как сумма какого-нибудь частного решения этого уравнения $\bar{y}$ и общего решения y соответствующего однородного уравнения

$$a_0y''+a_1y'+a_2y=0 \qquad (2)$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения (1) запишется в виде:

1. Нахождение y описано в пункте 3.3.
2. Нахождения частного решения $\bar{y}$.

Рассмотрим ***метод неопределенных коэффициентов*** нахождения частного решения $\bar{y}$.

Если правая часть уравнения (1) имеет вид: $f(x)=e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x+Q_r(x)\sin\beta x$, то частное решение уравнения (1) может быть найдено в виде: $\bar{y}=x^m e^{\alpha x}[M_s(x)\cos\beta x+N_s(x)\sin\beta x]$ (3)

где $P_n(x),Q_r(x),M_s(x),N_s(x)$- многочлены соответственно n-ой, r-ой и s- ой степеней, причем s - наибольшая из степеней n и r. Число m – кратность $\alpha\pm\beta i$ как корня характеристического уравнения (2).

Для того, чтобы найти коэффициенты многочленов $M_s(x)$ и $N_s(x)$ искомое частное решение (3) подставляют левую часть дифференциального уравнения (1) и производят соответствующие упрощения; затем в полученном тождестве приравнивают коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях, что дает систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов, в которой определяют эти коэффициенты.

Укажем вид $\bar{y}$ для некоторых частных случаев:

1) если $f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$, то $\bar{y}=x^m e^{\alpha x}Q_n(x)$, где m - кратность $\alpha=\alpha\pm 0i$ - как корня характеристического уравнения.

2) если $f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)\cos\beta x$, то $\bar{y}=xe^{m\alpha x}[M_n(x)\cos\beta x+N_n(x)\sin\beta x]$, где m - кратность $\alpha\pm\beta i$ - как корня характеристического уравнения.

3) если $f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)\sin\beta x$, то $\bar{y}=x^m e^{\alpha x}[M_n(x)\cos\beta x+N_n(x)\sin\beta x]$, где m - кратность $\alpha\pm\beta i$ - как корня характеристического уравнения.

Отметим также, что если $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, то $\bar{y}=\bar{y}_1+\bar{y}_2$, где $\bar{y}_1,\bar{y}_2$ - частные решения уравнений вида (1) $f(x)=f_1(x)$ и $f(x)=f_2(x)$ соответственно.

Решение типовых примеров

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y''+9y=9\cos 3x+16\sin 3x$**.**

Решение. 1) Сначала находим y. Характеристическое уравнение $k^2+9=0$ имеет корни $k_{1,2}=\pm 3$. Следовательно, $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$.

2) Найдем теперь $\bar{y}$. В данном случае правая часть имеет вид (3) при $\alpha=0, \beta=3, P_0(x)=9, Q_0(x)=16$. Так как число $\alpha\pm\beta i=3i$ служит однократным корнем характеристического уравнения, то m=1 и частное решение надо искать в виде $\bar{y}=x(A\cos 3x+B\sin 3x)$, где A и B – неопределенные коэффициенты. Находим:

$$\bar{y}'=(3Bx+A)\cos 3x+(-3Ax+B)\sin 3x;$$

$$\bar{y}''=(-9Ax+6B)\cos 3x+(-9Bx-6A)\sin 3x.$$

Подставляя $\bar{y}''$и $\bar{y}$ в данное уравнение и приводя подобные члены, получай $6B\cos 3x+6A\sin 3x=9\cos 3x+16\sin 3x$, откуда 6B=9, -6A=16, т.е. B=3/2, A=-8/3. Следовательно, $\bar{y}=x(-\frac{8}{3}\cos 3x+\frac{3}{2}\sin 3x)$. Итак, общее решение данного уравнения имеет вид:

$$\bar{y}=\bar{y}_1+\bar{y}_2=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x-\frac{8}{3}x\cos 3x+\frac{3}{2}x\sin 3x.$$

Пример 2. Найти частное решение уравнения $y''+2y'=e^x(3x^2+2x+9)$, удовлетворяющее условиям y(6)=5, y'(0)=1.

Решение. 1. Найдем общее решение y соответствующего однородного уравнения $y''+2y'=0$. Решая отвечающее ему характеристическое уравнение $k^2+2k=0$, получаем корни $k_1=0, k_2=-2$. Следовательно, $y=C_1+C_2e^{-2x}$.

2. Перейдем к отысканию частного решения $\bar{y}$ данного уравнения. Здесь правая часть $f(x)=e^x(3x^2+2x+9)$ имеет вид (3): $n=2, P_2(x)=3x^2+2x+9,$ $\alpha=1, \beta=0$. Так как $\alpha\pm\beta i=1$ не является корнем характеристического уравнения, то m=0. Следовательно, частное решение $\bar{y}$ нужно искать в виде, где A, B и C - некоторые коэффициенты, подлежащие определению. Для их отыскания воспользуемся тем, что $\bar{y}$ должно быть решением данного уравнения. Найдем $\bar{y}'$ и $\bar{y}''$:

$$\bar{y}'=(Ax^2+Bx+C)e^x+(2Ax+B)e^x=(Ax^2+2Ax+Bx+B+C)e^x$$

$$\bar{y}''=(Ax^2+2Ax+Bx+B+C)e^x+(2Ax+2A+B)e^x=(Ax^2+4Ax+Bx+2A+2B+C)e^x$$

теперь подставим выражения для $\bar{y}'$ и $\bar{y}''$ в данное уравнение:

$$2(Ax^2+2Ax+Bx+B+C)e^x+(Ax^2+4Ax+Bx+2A+2B+C)e^x=e^x(3x^2+2x+9)$$

Сокращая обе части полученного равенства на e^x и группируя члены при одинаковых степенях x, в результате получим:

$$3Ax^2+(8A+3B)x+2A+2B+3C=3x^2+2x+9$$

Это равенство выполняется тождественно только тогда, когда коэффициенты при одинаковых степенях x, в обеих его частях равны между собой. Итак, для отыскания коэффициентов A, B и C имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 3A = 3, \\ 8A + 3B = 2, \\ 2A + 4B + 3C = 9, \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 1, \\ B = -2, \\ C = 5. \end{cases}$$

Таким образом, $\bar{y} = e^x (x^2 - 2x + 5)$.

Теперь можно записать общее решение данного уравнения:

$\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 = C_1 + C_2 e^{-2x} + (x^2 - 2x + 5)e^x$

Дифференцируем обе части последнего равенства:

$y' = -2C_2 e^{-2x} + (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x + 5)e^x$

Подставив начальные условия, получаем систему двух уравнений относительно C_1 и C_2.

$$\begin{cases} 5 = C_1 + C_2 + 5, \\ 1 = -2C_2 - 2 + 5, \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1 = -1, \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Следовательно, $y = -1 + e^{-2x} + (x^2 - 2x + 5)e^x$ - искомое частное решение.

Задания для решения в аудитории

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а). $y'' - 2y' + y = x + 1$

б). $y'' - 3y' = 12x - 1$

в). $y'' - 3y' + 2y = 4e^{3x}$

г). $y'' - 2y' + y = \sin x + e^{-x}$

ГЛАВА 4 РЯДЫ

4.1 Числовые ряды

Пусть $u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$ бесконечная числовая последовательность.

Выражение вида $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$ (1) называется числовым рядом (или просто рядом), а числа $u_1, u_2, u_3, ...$ называются членами ряда; u_n при произвольном n называется общим членом ряда (иногда первый член ряда обозначают u_0, второй — u_1 и т. д., то есть придают n значения $0, 1, 2, ...$). Ряд часто записывают $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Числовой ряд задан, если известен его общий член u_n, или известен закон, по которому он может быть получен.

Сумму первых n членов числового ряда обозначают через S_n и называют ***частичной суммой*** ряда :

$$S_1 = u_1; \quad S_2 = u_1 + u_2; \quad S_3 = u_1 + u_2 + u_3; \quad ... ; \quad S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n \qquad (2)$$

Определение Ряд (9.1) называется сходящимся, если n-я частичная сумма S_n при неограниченном возрастании n стремится к конечному пределу, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, где S называется суммой ряда (1).

Если же n-я частичная сумма ряда при $n \to \infty$ не стремится к конечному пределу или вообще не имеет никакого предела, то ряд называется расходящимся.

Ряд $a+aq+aq^2+...+aq^{n-1}+...$ (3) называется геометрической прогрессией, a - первый член ряда; q – знаменатель прогрессии, сумма ряда $S_n = \dfrac{a-aq^n}{1-q}$.

При |q|<1 ряд (9.3) сходится, его сумма равна $S = \dfrac{a}{1-q}$ и при $|q| \geq 1$ ряд (3) расходится.

Ряд $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+...+\dfrac{1}{n}+...$ (4) называется гармоническим рядом, он расходится.

Ряд $1+\dfrac{1}{2^p}+\dfrac{1}{3^p}+\dfrac{1}{4^p}+...+\dfrac{1}{n^p}+...$ (5) называется обобщенным гармоническим рядом, при $p>1$ этот ряд сходится, а при $P \leq 1$ он расходится.

Необходимое условие сходимости ряда

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то его общий член u_n стремится к 0 при $n \to \infty$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ (6)

Если общий челн ряда u_n не стремится к 0 при $n \to \infty$, то ряд расходится.

Достаточные признаки сходимости рядов

1. ***Признаки сравнения***

Пусть даны два ряда с положительными членами

$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ (*)

$v_1 + v_2 + ... + v_n + ... = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ (**)

1) Если члены ряда (*) не превосходят соответствующих членов ряда (**), т. е. $u_n \leq v_n$ и ряд (**) сходится, то сходится и ряд (*).

2) Если члены ряда (*) не меньше соответствующих членов ряда (**), т.е. $u_n \geq v_n$ и ряд (**) расходится, то расходится и ряд (*).

Этот признак остаётся в силе, если неравенства $u_n < v_n$ $(u_n > v_n)$ выполняются не при всех n, а лишь начиная с некоторого номера $n = N$.

2. ***Предельный признак сравнения***

Пусть даны два знакоположительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Если существует конечный, отличный от нуля, предел $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A \quad (0 < A < \infty)$, то оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся и расходятся одновременно.

3. ***Признак Даламбера***

Если для знакоположительного ряда $u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ существует $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то если $l < 1$ ряд сходится, если же $l > 1$, то ряд расходится.

Если $l = 1$, то ряд может сходиться, а может и расходиться. В этом случае признак Даламбера ответа не дает, приходится исследовать на сходимость ряд с помощью других признаков.

4. ***Признак Коши*** (Радикальный признак)

Если для знакоположительного ряда $u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ существует $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, то если $l < 1$, то ряд сходится, если $l > 1$, то ряд расходится.

Если $l = 1$, то радикальный признак ответа не дает.

5. ***Признак Коши*** (Интегральный признак).

Пусть члены знакоположительного ряда $u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq ...$ и $f(x)$ такая непрерывная невозрастающая на промежутке $[1; +\infty)$ функция, что $f(1) = u_1,\ f(2) = u_2, \ldots,\ f(n) = u_n, \ldots$

Тогда, если несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то и ряд сходится, а если он расходится, то и ряд расходится.

Решение типовых примеров

Пример 1. Дан общий член ряда $u_n = \frac{2n-1}{3^n}$. Написать первые четыре члена ряда.

Решение. Если $n=1$, то $u_1=\frac{1}{3}$; если $n=2$, то $u_2=\frac{3}{9}$; если $n=3$, то $u_3=\frac{5}{27}$; если $n=4$, то $u_4=\frac{7}{81}$;…. Ряд можно записать в виде $\frac{1}{3}+\frac{3}{9}+\frac{5}{27}+\frac{7}{81}+\ldots$.

Пример 2. Найти общий член ряда $\frac{4}{2}+\frac{16}{4}+\frac{64}{6}+\frac{256}{8}+\ldots$.

Решение. Числители образуют геометрическую прогрессию $4, 4^2, 4^3, 4^4, \ldots$; n-й член этой прогрессии $b_n=4^n$. Знаменатели образуют арифметическую прогрессию $2, 4, 6, 8, \ldots$; n-й член этой прогрессии находим по формуле $a_n=a_1+d(n-1)$, где $a_1=2$, $d=2$, поэтому $a_n=2n$. Следовательно, общий член этого ряда $u_n=\frac{4^n}{2n}$.

Пример 3. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+5n+6}$.

Решение. Представим общий член ряда в виде суммы простейших дробей:

$$u_n=\frac{1}{n^2+5n+6}=\frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

$$\frac{1}{(n+2)(n+3)}=\frac{A}{n+2}+\frac{B}{n+3}$$

Умножая обе части этого выражения на знаменатель, придём к тождеству

$$1\equiv A(n+3)+B(n+2).$$

Полагая $n=-2$, находим 1 = A; значит $A=1$;

$n=-3$, находим 1 = - B; значит $B=-1$.

Таким образом, $u_n=\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}$, т.е. $u_n=\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}$.

Отсюда $u_1=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$; $u_2=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$; $u_3=\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$; $u_4=\frac{1}{6}-\frac{1}{7}$;….

Следовательно,

$$S_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}.$$

Так как $S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3})=\frac{1}{3}$, то ряд сходится и его сумма равна $\frac{1}{3}$.

Пример 4. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+4}$.

Решение. Сравним этот ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ (то есть с бесконечно убывающей геометрической прогрессией, так как $q=\frac{1}{3}<1$), этот ряд сходится.

Члены данного ряда меньше соответствующих членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$, следовательно, данный ряд сходится.

Пример 5. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4\cdot 2^n-3}$.

Решение. Сравним этот ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ ($q=\frac{1}{2}<1$, бесконечно убывающая геометрическая прогрессия). Применим предельный признак сравнения рядов:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{4\cdot 2^n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4-\frac{3}{2^n}}=\frac{1}{4}.$$

Так как предел конечен и отличен от нуля и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ сходится, то сходится и данный ряд.

Пример 6. Исследовать сходимость ряда $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{3n-1}+\ldots$.

Решение. Сравним данный ряд с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (расходится).

Воспользуемся предельным признаком сравнения $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n-1}=\frac{1}{3}$.

Следовательно, данный ряд расходится.

Пример 7. Исследовать сходимость ряда $\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2^{10}}+\frac{2^3}{3^{10}}+\frac{2^4}{4^{10}}+\ldots+\frac{2^n}{n^{10}}+\ldots$.

Решение. Применим признак Даламбера: имеем $u_n=\frac{2^n}{n^{10}}$, $u_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)^{10}}$.

Тогда $l=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot n^{10}}{(n+1)^{10}\cdot 2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot n^{10}}{(n+1)^{10}}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{10}}=2$.

Так как $l>1$, то данный ряд расходится.

Пример 8. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

Решение. Здесь удобнее применить радикальный признак Коши, поскольку $\sqrt[n]{u_n}=\frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$.

$$l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{e}{3}$$, так как $l<1$, то данный ряд сходится.

Пример 9. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$.

Решение. Воспользуемся интегральным признаком Коши:

$$u_n=\frac{n}{n^2+1},\qquad f(x)=\frac{x}{x^2+1},\quad \int_1^{\infty}\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{2x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|_1^{\infty}=\infty.$$

Интеграл расходится, поэтому расходится и данный ряд.

Задания для решения в аудитории

1. Записать 4-5 первых членов ряда, по известному общему члену $U_{n.}$, если:

а) $U_n=\dfrac{3n-2}{n^2+1}$

б) $U_n=\dfrac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$

2. Написать простейшую формулу n – го члена ряда по указанным членам:

а) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+...$

б) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+...$

в) $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+...$

г) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+...$

3. Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости рядов:

а) $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{6}{7}+...+\frac{2n}{2n+1}+...$

б) $1+\frac{3}{4}+\frac{5}{9}+\ldots+\frac{2n-1}{n^2}+\ldots$

4. Найти сумму n – первых членов ряда (S_n), доказать сходимость ряда, пользуясь непосредственно определением сходимости и найти сумму ряда S:

а) $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots$

б) $\frac{5}{6}+\frac{13}{36}+\ldots+\frac{3^n+2^n}{6^n}+\ldots$

5. Исследовать на сходимость по признаку сравнения:

а) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 9}+\frac{1}{3\cdot 27}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 3^n}+\ldots;$

б) $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\ldots;$

6. Исследовать на сходимость, используя признак Даламбера:

а) $1+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5^2}+\frac{1}{4\cdot 5^3}+\ldots;$

б) $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{27}+\frac{8}{81}+\ldots;$

7. Исследовать на сходимость, используя радикальный признак Коши:

а) $\sum\limits_{\text{ï}=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{n}}$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}$

8. Исследовать на сходимость, используя интегральный признак Коши:

а) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots.+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$

б) $1+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{10}}+\ldots$

4.2 Знакочередующиеся ряды

Определение Ряд, у которого любые два соседних члена имеют разные знаки, называется знакочередующимся.

Знакочередующийся ряд имеет вид

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots, \qquad (7)$$

где $u_n > 0$ для всех $n \in N$.

Для знакочередующегося ряда имеет место достаточный признак сходимости, который называют признаком Лейбница.

Признак Лейбница. Если в знакочередующемся ряде (7) абсолютные величины членов ряда убывают $|u_1| > |u_2| > \ldots > |u_n| > \ldots$ и общий член ряда u_n стремится к 0 при неограниченном увеличении его номера, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = 0$, то ряд (7) сходится, его сумма положительная и не превосходит первого члена ряда ($0 < S < u_1$).

Замечание. Если хотя бы одно условие признака Лейбница не выполняется, то ряд расходится.

Если знакочередующийся ряд удовлетворяет условию признака Лейбница, то можно оценить ошибку, которая получится, если заменить его сумму S частичной суммой S_n. Допускаемая при этом погрешность, оценивается для знакочередующегося ряда по признаку Лейбница.

При такой замене мы отбрасываем все члены ряда, начиная с u_{n+1}. Но отбрасываемые члены образуют знакочередующийся ряд, сумма которого меньше первого члена этого ряда, т. е. меньше u_{n+1}.

Ошибка, совершаемая при замене суммы ряда S на частичную сумму S_n, равна $\delta = |r_n| = |S - S_n|$ и не превосходит по абсолютной величине первого из отброшенных членов ряда, т. е. $|r_n| < u_{n+1}$.

Решение типовых примеров

Пример 1. Исследовать сходимость ряда:

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots .$$

Вычислить приближенно его сумму, удержав три первых члена ряда, и оценить погрешность.

Решение. Проверим выполнимость условий признака Лейбница, т.к. $u_n = \frac{1}{(n+1)^2}$,

$$1)\frac{1}{4} > \frac{1}{9} > \frac{1}{16} > \ldots$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = 0.$$

Оба условия выполняются. Следовательно, данный ряд сходится

$$S \approx S_3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} = 0,2014.$$

Ошибка δ, получающаяся при замене суммы этого ряда суммой трёх первых членов, меньше абсолютной величины четвертого члена, то есть:

$\delta < |u_4|$, $\quad \delta < \frac{1}{25}$ =0,04.

Ответ: $S = 0,2014$, $\delta < 0,04$.

Пример 2. Вычислить сумму ряда с точностью до 0,01

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3n^2}.$$

Решение. Данный ряд сходится, так как $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n^2} = 0$,

Так как $|r_n| < u_{n+1} < 0,01$, то найдём n

$$\left|\frac{1}{3(n+1)^2}\right| < 0.01, \qquad 3(n+1)^2 > 100,$$

$$\sqrt{3}(n+1) > 10, \qquad n+1 > \frac{10}{\sqrt{3}},$$

$$n > 5,7 - 1, \qquad n > 4,7.$$

Следовательно, $n = 5$.

Значит, это неравенство выполняется, начиная, с $n = 5$.

Таким образом,

$$S \approx S_5 = \frac{1}{3\cdot 1^2} - \frac{1}{3\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 3^2} - \frac{1}{3\cdot 4^2} + \frac{1}{3\cdot 5^2} =$$

$$= 0,333 - 0,083 + 0,037 - 0,021 + 0,013 = 0,279.$$

Ответ: $S = 0,28$.

Задания для решения в аудитории

1. а) Оценить ошибку, допускаемую при замене суммы ряда:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \left(-1\right)^{ï-1}\frac{1}{ï} + \ldots$$

суммой четырех первых его членов. Найти эту сумму.

б) Оценить ошибку, допускаемую при замене суммы ряда

$$0{,}1-\frac{0{,}1^2}{2}+\frac{0{,}1^3}{3}-\frac{0{,}1^4}{4}+\ldots$$

суммой трех первых его членов. Найти эту сумму.

2. Вычислить сумму ряда с точностью до ε:

а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)^3}, \quad \varepsilon=0{,}001$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n!}, \quad \varepsilon=0{,}01$

4.3 Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость

Определение Ряды, члены которых имеют произвольные знаки, называются знакопеременными рядами.

Пусть $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ (8) знакопеременный ряд.

Числа u_1, u_2, $\ldots$, $u_n,\ldots$ могут быть как положительными, так и отрицательными, причем расположение положительных и отрицательных членов ряда произвольное.

Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда

Если для знакопеременного ряда $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов, т. е. $|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots$, то данный знакопеременный ряд также сходится.

Определение. Знакопеременный ряд $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов $|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots$.

На основании достаточного признака сходимости знакопеременного ряда ***всякий абсолютно сходящийся ряд является сходящимся***.

Определение. Знакопеременный ряд $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ называется ***условно сходящимся*** (или не абсолютно сходящимся), если он сходится, а ряд $|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots$, составленный из абсолютных величин его членов расходится.

Решение типовых примеров

Исследовать сходимость знакопеременных рядов и установить характер сходимости (абсолютная, условная)

Пример 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^5}}$.

Решение. Ряд знакочередующийся, поэтому применим признак Лейбница.

1) $1 > \frac{1}{\sqrt[4]{2^5}} > \frac{1}{\sqrt[4]{3^5}} > \frac{1}{\sqrt[4]{4^5}} > \ldots$ первое условие признака выполнено,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^5}} = 0$ второе условие признака выполнено, значит, ряд сходится.

Составим ряд из абсолютных величин данного ряда:

$$1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2^5}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3^5}} + \frac{1}{\sqrt[4]{4^5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[4]{n^5}} + \ldots.$$

Этот ряд обобщённо гармонический и при $p = \frac{5}{4} > 1$ является сходящимся. Значит, данный ряд сходится абсолютно.

Пример 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{10n+1}$.

Решение. Применим признак Лейбница.

1) $\frac{1}{11} > \frac{1}{21} > \frac{1}{31} > \frac{1}{41} > \ldots$первое условие признака выполнено,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{10n+1} = 0$ второе условие признака выполнено, значит, ряд сходится.

Составим ряд из абсолютных величин данного ряда:

$$\frac{1}{11} + \frac{1}{21} + \frac{1}{31} + \frac{1}{41} + \ldots + \frac{1}{10n+1} + \ldots.$$

Исследуем этот ряд с помощью интегрального признака Коши:

$$f(x) = \frac{1}{10x+1},$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{10x+1} = \frac{1}{10}\int_1^{\infty} \frac{d(10x+1)}{10x+1} = \frac{1}{10}\ln(10x+1)\Big|_1^{\infty} = \infty.$$

Интеграл расходится, поэтому и ряд расходится.

Значит, данный ряд сходится условно.

Пример 3. $1{,}1 - 1{,}01 + 1{,}001 - \ldots + (-1)^{n-1}\left[1 + (0{,}1)^n\right] + \ldots$.

Решение. Применим признак Лейбница.

1) $1{,}1 > 1{,}01 > 1{,}001 > \ldots$первое условие признака выполнено,

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{10^n}) = 1$ второе условие признака не выполняется. Значит, ряд расходится.

Задания для решения в аудитории

1. Выяснить, какие ряды сходятся абсолютно, какие сходятся условно, какие расходятся.

а) $-\frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} - \frac{7}{2^3} + \ldots + (-1)^n \frac{2n+1}{2^n} + \ldots$.

б) $-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{7^2}-\frac{1}{10^2}+...+(-1)^n\frac{1}{(3n+1)^2}+...$.

4.4 Функциональные ряды

Определение. Ряд, членами которого являются функции от *x,* называется функциональным:

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+... \quad (9)$$

Совокупность тех значений x, при которых функциональный ряд сходится, называется ***областью сходимости*** этого ряда. Областью сходимости функционального ряда чаще всего служит какой-нибудь промежуток оси *Ox*.

Частичная сумма функционального ряда, т. е. сумма первых n его членов, является функцией переменной x:

$$S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x) \quad (10)$$

В любой точке x из области сходимости функционального ряда (9) существует предел частичной суммы (9.10) при $n\to\infty$. В точках, не принадлежащих области сходимости функционального ряда частичная сумма $S_n(x)$ не имеет предела. Сумма функционального ряда является некоторой функцией от x, определенной в области сходимости ряда:

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x),\ \forall x\in D \quad (11)$$

Разность $R_n(x)=S(x)-S_n(x)$ называется остатком функционального ряда.

Определение. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ называется равномерно сходящимся в области *D*, к функции $S(x)$, если для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое число N, что для всех $n>N$ и для всех $x \in D$ справедливо неравенство $\left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x) - S(x)\right| < \varepsilon$ или $\left|R_n(x)\right| = \left|S_n(x) - S(x)\right| < \varepsilon$.

Признак Вейерштрасса (достаточный признак равномерной сходимости).

Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на отрезке $[a,\ b]$ существует сходящийся знакоположительный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$, удовлетворяющий условию:

$$\left|u_n(x)\right| \le C_n \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на отрезке $[a, b]$ равномерно.

Решение типовых примеров

Пример 1. Найти область сходимости рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}$.

Решение. По радикальному признаку Коши имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}}{x}\right| = \left|\frac{1}{x}\right| \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} = \left|\frac{e}{x}\right|.$$

Ряд будет сходиться при $\left|\frac{e}{x}\right| < 1$, следовательно, $\frac{e^2}{x^2} - 1 < 0$, $\frac{e^2 - x^2}{x^2} < 0$, так как $x^2 > 0$, то $e^2 - x^2 < 0$. Ряд сходится при $x \in (-\infty; -e) \cup (e; +\infty)$.

Пример 2. Исследовать на равномерную сходимость:

$$\sin x + \frac{1}{2^2}\sin^2 2x + \frac{1}{3^2}\sin^3 3x + \ldots + \frac{1}{n^2}\sin^n nx + \ldots .$$

Решение. Область определения $(-\infty; +\infty)$. Сравним данный ряд с числовым знакоположительным рядом $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$ - это обобщённо гармонический ряд, при $p = 2 > 1$ он сходится.

Так как $\left|\frac{\sin^n nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$, то по признаку Вейерштрасса данный ряд равномерно сходится на всей оси Ox.

Задания для решения в аудитории

1. Найти область сходимости рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\left(1+x^2\right)^n}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}$

4.5 Степенные ряды

Определение. Степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (12)$$

Числа $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$ называются коэффициентами степенного ряда, $x \in R$. Ряд (9.12) разложен по степеням x. Рассматриваются также степенные ряды, разложенные по степеням $(x - x_0)$, то есть ряд вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots, \qquad (13)$$

где x_0 - некоторое постоянное число.

Ряд (13) легко приводится к виду (12), если положить $x - x_0 = z$. Поэтому при изучении степенных рядов можем ограничиться степенными рядами вида (12).

Основное свойство степенных рядов:

Теорема Абеля. Если степенной ряд (12) сходится при $x = x_0 \neq 0$, то он сходится и притом абсолютно для всех x, удовлетворяющих условию $|x| < |x_0|$. Если ряд (12) расходится при $x = x_1$, то он расходится при всех x, удовлетворяющих условию $|x| > |x_1|$.

Из теоремы Абеля следует, что $x_0 \neq 0$ есть точка сходимости степенного ряда, то интервал $(-|x_0|;|x_0|)$ весь состоит из точек сходимости степенного ряда и называется ***интервалом сходимости степенного*** ряда. Положив $|x_0| = R$, интервал сходимости можно записать в виде $(-R;R)$. Число R называют ***радиусом сходимости*** степенного ряда, то есть R>0 - это такое число, что при всех x, для которых $|x| < R$, ряд (12) абсолютно сходится, а при $|x| > R$ ряд расходится.

В частности, когда ряд (12) сходится лишь в одной точке $x_0 = 0$, то считаем, что $R = 0$. Если же ряд (12) сходится во всех точках числовой оси $(-\infty;+\infty)$, то в этом случае $R = \infty$.

Отметим, что на концах интервала сходимости (то есть при $x = -R$ и при $x = +R$) сходимость ряда проверяется отдельно.

Радиус сходимости степенного ряда (12) находим по формулам:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \tag{14}$$

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{15}$$

Для нахождения радиуса сходимости степенного ряда (9.12) можно использовать непосредственно признак Даламбера, в редких случаях признак Коши, для ряда составленного из абсолютных величин членов исходного ряда.

Замечания.

1. Интервал сходимости степенного ряда (9.13) находят из неравенства $|x - x_0| < R$ и он имеет вид $(x_0 - R; x_0 + R)$.

2. Если степенной ряд содержит не все степени x, т.е. задан неполный степенной ряд, то интервал сходимости ряда находят без определения радиуса сходимости, а непосредственно применяют признак Даламбера (или признак Коши) для ряда, составленного из модулей членов данного ряда.

Свойства степенных рядов

1. Сумма $S(x)$ степенного ряда (9.12) является непрерывной функцией в интервале сходимости $(-R;R)$.

2. Если радиус сходимости ряда отличен от нуля, то степенной ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать любое число раз внутри интервала сходимости. При этом интервал сходимости не изменяется.

3. Внутри интервала сходимости ряды можно складывать, вычитать, умножать, делить, умножать на число. Интервал сходимости должен быть одинаковым.

Решение типовых примеров

Пример 1. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n 3^n}{n!}$.

Решение. Воспользуемся формулой (14):

$$a_n = \frac{3^n}{n!}$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}\right| = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty .$$

Следовательно, ряд сходится на всей числовой оси.

Пример 2. Найти область сходимости степенного ряда:

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + \left(-1\right)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots .$$

Решение. Заданный ряд не полный. Воспользуемся признаком Даламбера.

$$|u_n| = \left|\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right|, \qquad |u_{n+1}| = \left|\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right|,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{x^{2n-1}}\right| = \left|x^2\right|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1} = x^2 .$$

Ряд абсолютно сходится, если $x^2 < 1$ или $-1 < x < 1$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

При $x = -1$, $\quad -1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \ldots$, сходится по признаку Лейбница.

При $x = 1$, $\quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$, тоже сходится по признаку Лейбница.

Следовательно, областью сходимости является отрезок $\left[-1;1\right]$.

Пример 3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 3^{n-1}}$.

Решение. Находим радиус сходимости ряда по формуле (14):

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n\cdot 3^{n-1}} : \frac{1}{(n+1)\cdot 3^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)3^n}{n\cdot 3^{n-1}} = 3 .$$

Следовательно, ряд сходится при $-3 < x-3 < 3$, то есть при $\quad 0 < x < 6$.

При $x=0$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n}=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ сходится по признаку Лейбница.

При $x=6$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n}=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Это гармонический ряд – расходится.

Следовательно, областью сходимости является интервал $[0;6)$.

Задания для решения в аудитории

1. Найти область сходимости степенных рядов

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^n$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

4.6 Ряды Тейлора и Маклорена

Для приложений важно уметь данную функцию $f(x)$ разлагать в степенной ряд, т. е. функцию $f(x)$ представлять в виде суммы степенного ряда.

Если функцию $f(x)$ - любая функция, имеющая в некоторой окрестности точки x_0 производные $(n+1)$-го порядка включительно, справедлива формула Тейлора:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$
$$+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x), \qquad (16)$$

где $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ $\quad c\in(x;x_0)$ - остаточный член в форме Лагранжа.

Если для некоторого значения x $R_n(x)\to 0,$ $n\to\infty$, то в пределе формула Тейлора преобразуется для этого значения x в ряд Тейлора:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$
$$+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots. \qquad (17)$$

Если в ряде Тейлора положить $x_0=0$, то получим ряд Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \qquad (18)$$

Этот ряд называется рядом Маклорена функции $f(x)$.

Достаточный признак разложимости функции в ряд Тейлора

Если в некотором интервале, содержащем точку x_0, при любом n выполняется неравенство $\left|f^{(n)}(x)\right|<M$, где M - положительная постоянная, то $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$ и функция разложима в ряд Тейлора.

Некоторые примеры разложения в ряд Маклорена следующих функций:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \qquad x\in(-\infty;\infty); \qquad (19)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots \qquad x\in\left(-\infty;\infty\right); \qquad (20)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots \qquad x\in\left(-\infty;\infty\right); \qquad (21)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots \qquad x\in(-1;1]; \qquad (22)$$

$$\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots \qquad x\in\left[-1;1\right]; \qquad (23)$$

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7}+\ldots+$$
$$+\ldots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots, \qquad x\in[-1;1]; \qquad (24)$$

$$(1+x)^m = 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots$$

$$x\in\begin{Bmatrix}[-1;1], m\geq 0\\ (-1;1], -1<m<0\\ (-1;1), m\leq -1\end{Bmatrix}; \tag{25}$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+...+x^n+... \qquad x\in(-1;1). \tag{26}$$

Решение типовых примеров

Пример 1. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x)=2^x$.

Решение. Найдём значения функции и её производных при $x=0$:

$$\begin{array}{ll} f(x)=2^x, & f(0)=1,\\ f'(x)=2^x\ln 2, & f'(0)=\ln 2,\\ f''(x)=2^x\ln^2 2, & f''(0)=\ln^2 2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \\ f^{(n)}(x)=2^x\ln^n 2, & f^{(n)}(0)=\ln^n 2, \end{array}$$

Так как $0<\ln 2<1$, то при фиксированном x имеет место неравенство $\left|f^{(n)}(x)\right|<2^x$ для любого n. Следовательно, функция может быть представлена в виде суммы ряда Маклорена:

$$2^x=1+x\ln 2+\frac{x^2\ln^2 2}{2!}+\frac{x^3\ln^3 2}{3!}+... \qquad x\in(-\infty;\infty)$$

Это решение можно получить иначе: достаточно в разложении:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

заменить x на $x\ln 2$, так как $2^x=e^{\ln 2^x}=e^{x\ln 2}$.

Пример 2. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x)=\dfrac{2}{3-x}$.

Решение. Воспользуемся формулой (26). Так как

$$f(x)=\frac{2}{3-x}=\frac{2}{3(1-\frac{x}{3})}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}},$$

то заменив x на $\dfrac{x}{3}$ получим:

$$\frac{2}{3-x}=\frac{2}{3}\cdot\left(1+\frac{x}{3}+\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{x}{3}\right)^3+...\right), \text{ или}$$

$$\frac{2}{3-x}=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{x}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{3^2}+...+\frac{2}{3}\cdot\frac{x^n}{3^n}+...,$$

где $-1<\dfrac{x}{3}<1$, то есть $-3<x<3$.

Пример 3. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x)=\cos^2 x$.

Решение. $f(x)=\cos^2 x=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$, поэтому достаточно разложить в ряд функцию $\cos 2x$, заменив в формуле (9.21) x на $2x$:

$$\cos 2x=1-\frac{2^2x^2}{2!}+\frac{2^4x^4}{4!}-\frac{2^6x^6}{6!}+\ldots,\qquad x\in(-\infty;\infty).$$

Это разложение справедливо, как и в случае $\cos x$, для всех x.

В итоге получим:

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}\left(1+1-\frac{2^2x^2}{2!}+\frac{2^4x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(2-\frac{2^2x^2}{2!}+\frac{2^4x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)=$$

$$=1-\frac{2x^2}{2!}+\frac{2^3x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

Пример 4. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x)=e^{-x}\sin x$.

Решение. Ряд для функции e^{-x} получается из ряда для функции e^x заменой x на $-x$ и абсолютно сходится на всей числовой прямой. Ряд для функции $\sin x$ также абсолютно сходится на всей числовой прямой. Поэтому, чтобы получить разложение функции $f(x)=e^{-x}\sin x$ в ряд, достаточно перемножить абсолютно сходящиеся ряды для функций e^{-x} и $\sin x$.

$$e^{-x}\sin x=\left(1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)\cdot\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\right)=x-x^2+\frac{1}{6}x^3-\frac{3}{40}x^5+\ldots$$

Полученный ряд, по свойству сходящихся рядов, сходится на всей числовой прямой к функции $f(x)=e^{-x}\sin x$.

Задания для решения в аудитории

1. Разложить функцию ряд Тейлора, взяв три члена разложения:

а) $f(x)=\sin x$ по степеням $\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

б) $f(x)=\ln(1-x-6x^2)$ по степеням *x*.

в) $f(x)=2x\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)-x$ по степеням *x*.

2. Разложить функцию $y=\ell n x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x=1$ (при $x_0=1$).

3. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=(1+x)^4$.

4. Разложить функцию $y=\sin\dfrac{x}{2}$ в ряд Тейлора в окрестности точки x = 0.

ГЛАВА 5 ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

5.1 Основные понятия теории вероятностей

Опыт и события теории вероятностей. Пространство исходов опыта

При изучении и описании окружающего мира часто приходится встречаться с явлениями особого типа, которые принято называть ***случайными***. По сравнению с другими, для них характерна большая степень неопределённости, непредсказуемости.

Случайное явление – *это такое явление, которое при неоднократном воспроизведении одного и того же опыта (испытания) протекает каждый раз несколько по-иному.*

Теорией вероятностей *называется математическая наука, изучающая закономерности в массовых случайных явлениях. Её предметом являются специфические закономерности, наблюдаемые в случайных явлениях.*

Одними из основных понятий теории вероятностей являются опыт и событие.

Под ***опытом*** (экспериментом, испытанием) будем понимать некоторую воспроизводимую совокупность условий, в которых наблюдается то или другое явление, фиксируется тот или другой результат.

Если результат опыта изменяется при его повторении, то говорят об ***опыте со случайным исходом.***

Случайным событием (просто событием) называется всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти. Пространство элементарных событий будем обозначать Ω, а его точки – ω.

Совмещением **(или *произведением*)** двух событий A и B называется событие, состоящее в совместном наступлении как события A, так и события B. Это событие будем обозначать AB или BA. Аналогично, совмещением нескольких событий, например A, B и C, называется событие $D=ABC$, состоящее в совместном наступлении событий A, B и C.

Объединением **(или *суммой*)** двух событий A и B называется событие C, заключающееся в том, что произойдет по крайней мере одно из событий A или B. Это событие обозначается так: $C=A+B$.

Пусть имеется некоторое испытание. Свяжем с ним определённую совокупность исходов, причём так, чтобы в результате испытания осуществлялся один и только один из этих исходов. *Такое множество называется* ***пространством элементарных событий****,* связанных с рассматриваемым испытанием, а входящие в множество исходы (результаты испытания) – ***точками пространства или элементарными событиями.***

Замечания

1. Для одного и того же испытания пространство элементарных событий можно вводить, вообще говоря, различными способами.

2. Пространство Ω может содержать конечное или бесконечное множество элементарных событий.

3. Если пространство состоит из конечного или счётного множества точек, то его называют ***дискретным***.

Рассмотрим некоторое пространство элементарных событий Ω. Из точек его можно сформировать различные множества.

Множество, состоящее из каких-то элементарных событий пространства Ω, называют ***случайным событием.*** Если элементарное событие ω принадлежит событию *А*, то пишут $\omega \in A$, если не принадлежит, то $\omega \notin A$.

Под ***достоверным*** событием понимают событие, составленное из всех точек данного пространства Ω. Другими словами ***достоверное*** событие это событие, которое происходит при каждом испытании.

Достоверное событие будем обозначать Ω.

Под ***невозможным*** событием понимается событие, не содержащее ни одного элементарного события из данного пространства Ω. Другими словами, невозможное событие – событие, которое не может произойти ни при каком исходе испытания. Невозможное событие будем обозначать $\bar{\Omega}$.

Два случайных события *А* и *В,* составленные из одних и тех же элементарных событий, называют ***равными*** и пишут *А=В*, или два равных события при одном и том же опыте либо оба проявляются, либо оба не проявляются. Используется так же термин «равновозможные» события. Допустим, что все элементарные события, принадлежащие событию *А*, принадлежат также и событию *В*. В этом случае говорят, что событие *А* влечёт за собой событие *В*, или что событие *В* есть следствие события *А*, пишут $A \subset B$, или всякий раз, когда в результате опыта происходит событие *А*, происходит и событие *В* (обратное, вообще говоря неверно).

Замечания

1. Пусть $A \subset B$ и $B \subset A$, тогда *А* и *В* состоят из одних и тех же элементарных событий, следовательно *А=В*.

2. Если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$.

3. Каким бы ни было случайное событие *А*, состоящее из точек данного пространства элементарных событий Ω, всегда имеет место соотношение $A \subset \Omega$. С другой стороны принято считать, что невозможное событие влечёт за собой любое случайное событие *А*, т.е. $\bar{\Omega} \subset A$. Поэтому $\bar{\Omega} \subset A \subset \Omega$.

Два события, не содержащие общих элементарных событий, называют ***несовместными***. Другими словами, события называются ***несовместными***, если наступление одного из них исключает наступление другого. В противном случае события называются ***совместными***.

События $A_1, A_2, \dots, A_n \ (n \geq 2)$ называются попарно несовместными, если любые два из них несовместны.

5.2 Элементы комбинаторики

Комбинаторика изучает количества комбинаций, подчиненных определенным условиям, которые можно составить из элементов, безразлично какой природы, заданного конечного множества. При непосредственном вычислении вероятностей часто используют формулы комбинаторики.

Определение 1. Различные группы, составленные из каких-либо элементов, и отличающиеся одна от другой либо их порядком, либо элементами, называются *соединениями*.

Различают три вида соединений:

1. *перестановки;*
2. *размещения;*
3. *сочетания.*

Определение 2. *Перестановками* называются такие соединения из «n» элементов, которые составлены из одних и тех же элементов и отличаются только порядком следования элементов.

Например, множество, состоящее из трех элементов $\{1, 2, 3\}$ имеет следующие перестановки: $(1, 2, 3)$, (1, 3, 2), (2, 3, 1), (2, 1, 3), (3, 2, 1), (3, 1, 2).

Число различных перестановок из n элементов обозначается P_n и вычисляется по формуле:

$$P_n = n!, \text{ где } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot n \qquad (1)$$

Пример 1. Пять запечатанных пакетов с предложениями цены на аренду участков для бурения скважин поступили в специальное агентство утренней почтой. Сколько существует различных способов очередности вскрытия конвертов с предложениями цены?

Решение. Пронумеруем конверты цифрами от 1 до 5. Каждому конверту можно сопоставить один из наборов, состоящих из этих пяти цифр, например, (2, 5, 3, 4, 1). Такой набор означает, что сначала выбирается второй конверт, затем пятый, третий, четвертый и первый. Всего различных конвертов, т. е. отличающихся порядком наборов пяти цифр будет $5! = 120$.

Определение 3. *Размещениями* называются соединения из «n» элементов по «m» в каждом, отличающиеся одно от другого как самими элементами, так и их порядком. Размещения могут отличаться друг от друга, как элементами, так и порядком.

Например, различными размещениями множества из трех элементов $\{1, 2, 3\}$ по два будут наборы $(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2)$.

Число размещений из n элементов по m определяется по формуле:

$$A_n^m = n(n-1)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!} \qquad (2)$$

Пример 2. Фирма нуждается в организации 4 новых складов. Ее сотрудники подобрали 8 подходящих одинаково удобных помещений. Сколько существует способов отбора 4 помещений из 8 в заданном порядке?

Решение. Пронумеруем удобные помещения цифрами от $1, 2, \ldots, 8$. Составить способы отбора помещений можно следующим образом. Сначала выберем помещения, например, $(2, 4, 5, 7)$, а затем порядок их выбора. Таким образом, нужно составить различные наборы четырех чисел из восьми, которые отличаются друг от друга не только элементами, но и порядком. Таких наборов $A_8^4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680.$

Определение 4. *Сочетаниями* называются такие соединения, которые взяты из «n» элементов по «m» в каждом и отличаются друг от друга хотя бы одним элементом (порядок следования элементов не учитывается).

Сочетания отличаются друг от друга только элементами.

Например, для множества $\{1, 2, 3\}$ сочетаниями по 2 элемента являются $(1, 2), (1, 3), (2, 3)$.

Число сочетаний из n элементов по m определяется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \qquad (3)$$

Пример 3. На 9 вакантных мест по определенной специальности претендуют 15 безработных, состоящих на учете в службе занятости. Сколько возможных комбинаций выбора 9 из 15 безработных?

Решение. Комбинации выбора образуют сочетания из 15 по 9, поскольку порядок выбора среди 15 безработных нам безразличен, т.к. безработные по одной специальности. Следовательно, число возможных комбинаций будет равно $C_{15}^9 = \frac{15!}{9! \cdot 6!} = 5005$.

Размещения с повторениями

Пусть имеется n непересекающихся множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$, каждое из которых содержит не менее чем m элементов. Из элементов множества A, то есть элементов, входящих в различные его подмножества A_i, можно составлять различные упорядоченные множества, содержащие по m элементов в каждом.

Такие упорядоченные множества принято называть *размещениями с повторениями из элементов n сортов по m элементов, или, более коротко, просто размещениями с повторениями из n элементов по m.*

Число различных возможных размещений с повторениями из n элементов по m элементов определяется по формуле:

$$\tilde{A}_n^m = n^m \qquad (4)$$

Пример 4. В конкурсе по 5 номинациям участвуют 10 кинофильмов. Сколько существует вариантов распределения призов, если по каждой номинации установлены различные призы.

Решение. Каждый из вариантов распределения призов представляет собой комбинацию 5 фильмов из 10, отличающуюся от других комбинаций как составом фильмов, так и их порядком по номинациям (или и тем и другим). Причем одни и те же фильмы могут повторяться несколько раз (любой фильм может получить призы как по одной, так и по нескольким (включая все пять) номинациям), т.е. представляет размещение с повторениями из 10 элементов по 5. По формуле имеем:

$$\tilde{A}_{10}^{5} = 10^{5} = 100000.$$

Перестановки с повторениями

Определение 4*. Перестановкой с повторениями из n элементов называется любое упорядочение конечного множества, состоящего из n элементов, среди которых имеются совпадающие.*

Отсюда следует, что число различных перестановок с повторениями в нашем случае равно:

$$\tilde{P}_n(\alpha;\beta;\gamma;...;\lambda) = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,...\,\lambda!}, \text{ где } n = \alpha + \beta + \gamma + ... + \lambda \quad (5)$$

Пример 5. Сколько существует семизначных чисел, состоящих из цифр 4, 5, 6, в которых цифра 4 повторяется 3 раза, а цифры 5 и 6 – по 2 раза?

Решение. Каждое семизначное число отличается от другого порядком следования цифр (причем $n_1=3$, $n_2=2$, $n_3=2$, а их сумма равна 7), т.е. является перестановкой с повторениями из 7 элементов. Тогда:

$$\tilde{P}_n(3;2;2) = \frac{7!}{3!\,2!\,2!} = 210.$$

Сочетания с повторениями

Определение 5. *Сочетанием с повторениями из n элементов по m элементов называется всякое множество, содержащее m элементов, каждый из которых является элементом одного из данных n сортов.*

Число различных возможных сочетаний с повторениями из nэлементов по m элементов вычисляется по формуле:

$$\tilde{C}_n^m = \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!} \quad (6)$$

Пример 6. В конкурсе по 5 номинациям участвуют 10 кинофильмов. Сколько существует вариантов распределения призов, если по каждой номинации установлены одинаковые призы.

Решение. Если по каждой номинации установлены одинаковые призы, то порядок следования фильмов в комбинации 5 призов значения не имеет, и число вариантов распределения призов представляет собой число сочетаний с повторениями из 10 элементов по 5. Тогда:

$$\tilde{C}_{10}^5 = \frac{(5+10-1)!}{5!(10-1)!} = 2002.$$

Задачи для решения в аудитории

1. Сколькими способами можно взять 7 костей из полного набора домино (28 штук)?

2. В отделении 12 солдат. Каким числом способов можно составить наряд из двух человек, если один из них должен быть назначен старшим?

3. Какое число различных парных нарядов можно назначить из 12 солдат отделения, если не требуется назначать старшего по наряду?

4. Правление коммерческого банка выбирает из 10 кандидатов 3-х человек на различные должности (все 10 кандидатов имеют равные шансы). Сколько всего групп по 3 человека можно составить из 10 кандидатов?

5. Правление коммерческого банка выбирает из 10 кандидатов 3-х человек на одинаковые должности (все 10 кандидатов имеют разные шансы). Сколько всевозможных групп по 3 человека можно составить из 10 кандидатов?

6. Менеджер ежедневно просматривает 6 изданий экономического содержания. Если порядок просмотра изданий случаен, то, сколько существует способов его осуществления?

7. Директор корпорации рассматривает заявления о приеме на работу 10 выпускников университета. Сколькими способами директор может заполнить эти вакансии?

8. Имеется 6 путевок в санаторий и 7 путевок в дом отдыха. Сколькими способами можно выдать некоторому учреждению 3 путевки в санаторий и 4 путевки в дом отдыха?

9. На железнодорожной станции имеется пять запасных путей. Сколькими способами можно расставить шесть поездов?

10. Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами преподаватель может поставить им оценки, если известно, что все студенты сдали экзамен.

11. Сколькими способами можно выбрать четырехзначное число, все числа которого различны?

12. Сколькими способами можно распределить 28 костей домино между 4 игроками так, чтобы каждый получил 7 костей?

13. Сколько существует семизначных чисел, состоящих из цифр 2, 3, 4, в которых цифра 2 повторяется 4 раза, цифра 3 – 3 раза, цифра 4 – 5 раз?

5.3 Определение вероятности. Статистическое определение вероятности. Геометрическая вероятность.

Определение *Вероятностью P(A) события в данном опыте называется отношение числа* m *исходов опыта, благоприятствующих событию A, к общему числу* n *возможных исходов опыта, образующих полную группу равновероятных попарно несовместных событий:*

$$P(A) = \frac{m}{n} \qquad (7)$$

Это определение вероятности часто называют *классическим*.

Пример . На завод привезли партию из 1000 подшипников. Случайно в эту партию попало 30 подшипников, не удовлетворяющих стандарту. Определить вероятность P(A) того, что взятый наудачу подшипник окажется стандартным.

Решение

Число стандартных подшипников равно *1000-30=970*. Будем считать, что каждый подшипник имеет одинаковую вероятность быть выбранным. Тогда полная группа событий состоит из *n=1000* равновероятных исходов, из которых событию *A* благоприятствуют *m=970* исходов. Поэтому *P(A)=m/n=970/1000=0.97*.

При оценке вероятности событий, основанной на том, насколько ***часто*** будет проявляться данное событие в ***произведённых*** испытаниях, используется статистическое определение вероятности.

Статистической вероятностью события *A* называется относительная частота (частость) появления этого события в произведённых испытаниях, т.е.

$$P^*(A) = W(A) = \frac{M}{N}, \qquad (8)$$

где $P^*(A)$ - статистическая вероятность события *A*;

$W(A)$ - относительная частота (частость) события *A*;

M – число испытаний, в которых появилось событие *A*;

N – общее число испытаний.

В отличие от вероятности $P(A)$, рассматриваемой в классическом определении, статистическая вероятность $P^*(A)$ является характеристикой ***опытной, экспериментальной.*** Если $P(A)$ есть доля случаев, благоприятствующих событию *A*, которая определяется непосредственно, без каких-либо испытаний, то $P^*(A)$ есть доля тех ***фактически произведённых испытаний,*** в которых событие *A* появилось.

Пример. Наблюдения показывают, что в среднем среди 1000 новорожденных детей 515 мальчиков. Какова частота рождения мальчиков?

Решение

Пусть событие *A* – «рождение мальчика». Общее число испытаний в данной задаче n=1000, число m появлений события *A* равно 515. Частота появления события А: $P^*(A) = \frac{m}{n} = \frac{515}{1000} = 0,515$

Геометрическая вероятность

Пусть на плоскости имеется некоторая область *D*, площадь которой S_D, и в ней содержится другая область *d*, площадь которой S_d (рисунок 1.6). В область *D* наудачу бросается точка.

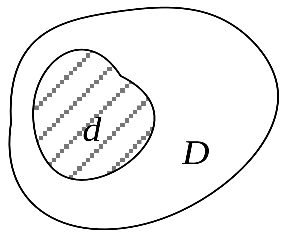


Рисунок 1.6

При этом предполагается, что наудачу брошенная точка может попасть в любую точку области и вероятность попадания в какую-либо часть области *D* не зависит от её расположения и формы.

Это значит, что пространство Ω содержит несчетное множество равновозможных элементарных событий ω и область *D* является геометрическим образом пространства Ω. Тогда $P(A)=\frac{S_d}{S_D}$ равна отношению площади области d, занятой благоприятствующими положениями точки попадания к площади области D.

Геометрической вероятностью события A называется отношение меры области (длины, площади, объёма) благоприятствующей появлению события A, к мере всей области, т.е.

$$P(A)=\frac{mes\ d}{mes\ D}, \qquad (9)$$

где mes - мера (длина, площадь, объём).

Задачи для решения в аудитории

1. Бросают 2 игральные кости. Какова вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях равна 5?

2. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешены. Какова вероятность того, что кубик, извлеченный наудачу, будет иметь 2 окрашенные стороны.

3. Из 60 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент подготовил 50. Какова вероятность того, что вытянутый студентом билет, содержащий 2 теоретических вопроса, будет состоять из подготовленных им вопросов?

4. Английский математик Карл Пирсон (1857-1936) бросал монету 24000 раз, причем герб выпал 12012 раз. Какова частота появления герба в данной серии испытаний?

5. Отдел технического контроля обнаружил пять бракованных книг в партии из случайно отобранных 100 книг. Найти относительную частоту появления бракованных книг.

6. При испытании партии приборов относительная частота годных приборов оказалась равной 0,9. Найти число годных приборов, если всего было проверено 200 приборов.

7. В магазине проведен учет спроса костюмов:

Размер	44	46	48	50	52	54
Спрос	90	148	532	585	455	183

Определить частость спроса в % 48 размера

8. Некоторая фирма в течение времени провела опрос 1000 покупателей нового сорта напитка и 20 из них оценили его как вкусный. Оценить вероятность того, что потребителям понравится новый напиток.

9. На территории предприятия произошла авария водопровода. Общая длина водопровода L=150 м. В том числе 50 м трубы приходятся на труднодоступные места. Какова вероятность того, что ремонт придется производить именно на труднодоступном участке?

10. На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых 5 и 10 *см* соответственно. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадет также и в кольцо, образованное построенными окружностями. Предполагается, что вероятность попадания точки в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры и не зависит от ее расположения.

11. В круг радиуса R помещен меньший круг радиуса r. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в большой круг, попадет также и в малый круг. Предполагается, что вероятность попадания точки в круг пропорциональна площади круга и не зависит от его расположения.

5.4 Условная вероятность. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Событием, *противоположным* событию *А*, называется событие $\bar{A}$, состоящее в ненаступлении события А.

Теорема 1. *Для любого события* А *вероятность противоположного события* $\bar{A}$ *выражается равенством*

$$P(\bar{A})=1-P(A)$$

Теорема 2. *Вероятность невозможного события равна нулю.*

Как отмечено выше, вероятность Р (*В*) как мера степени объективной возможности наступления события *В* имеет смысл при выполнении определенного комплекса условий. При изменении условий вероятность события *В* может измениться.

Определение 1. Вероятность события *В*, вычисленная при условии, что произошло некоторое событие *А*, называется ***условной вероятностью*** события *В* и обозначается.

$$P_A(B)$$

Пример: Для некоторой местности среднее число дождливых дней в августе равно 15.К.в.т.,ч. 2-го августа будет дождь?

$$\frac{\begin{array}{l} n=31 \\ m_{д}=15 \end{array}}{}$$

	I	II
	$A-1.08$ - дождь	$A-1.08$ - ясно
	В - 2.08 - дождь	В- 2.08 - дождь
	$\mathrm{n}=30 \quad \mathrm{m}_{д}=14$	$\mathrm{n}=30\ ;\ \mathrm{m}_{д}=15$
	$P_A(B)=\dfrac{14}{30}$	$P_A(B)=\dfrac{15}{30}=\dfrac{1}{2}$

Теорема умножения двух зависимых событий.

Теорема 3 Вероятность совместного наступления двух зависимых событий *А* и *В* равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, в предположении, что первое событие уже произошло.

$$\boxed{P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B)} \qquad (10)$$

<u>*Следствие 1.*</u> Теорема (3) легко обобщается на случай произвольного числа событий

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot \underset{A_1}{P}(A_2) \cdot \underset{A_1A_2}{P}(A_3) \cdot \ldots \cdot \underset{A_1...A_{n-1}}{P}(A_n)$$

При этом вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события произошли.

<u>*Следствие 2.*</u> Для любого из событий A и B справедливо равенство $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$, т.е. теорема (3) обладает коммутативностью умножения $A \cdot B = B \cdot A$

Пример. См. условие предыдущей задачи. К.в.т.,ч. 1, 2, 3 августа будут дождливы?

A – 1.08. – дождь

B – 2.08. – дождь

C – 3.08. – дождь

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot \underset{A \cdot B}{P}(C)$$

$$P(A) = \frac{15}{31} \quad ; \quad P_A(B) = \frac{14}{30} \quad ; \quad \underset{A \cdot B}{P}(C) = \frac{13}{29}$$

$$P(A \cdot B \cdot C) = \frac{\cancel{15}}{31} \cdot \frac{\overset{7}{\cancel{14}}}{\underset{8}{\cancel{30}}} \cdot \frac{13}{29} = \frac{91}{899} = 0{,}1$$

Теорема умножения для независимых событий.

Определение 2. Два события называются ***независимыми***, если появления одного из них не меняет вероятности наступления другого.

Пусть события A и B – независимы, тогда $P_A(B) = P(B)$

Теорема 4. Вероятность совместного наступления двух независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий.

$$\boxed{P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)} \qquad (11)$$

<u>*Следствие.*</u> Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий.

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$$

Пример. Имеется 3 ящика, содержащих по 10 деталей. В первом ящике 8, во втором 7 и в третьем 9 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу выбирают по одной детали. К.в.т.,ч. все три вынутые детали окажутся нестандартными?

A- нестандартная деталь из 1-го ящика
B- -‖- -‖- -‖- 2-го ящика | независимые
C- -‖- -‖- -‖- 3-го ящика

$$P(A)=\frac{2}{10} \quad ; \quad P(B)=\frac{3}{10} \quad ; \quad P(C)=\frac{1}{10}$$

$$P(A\cdot B\cdot C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)=0,2\cdot 0,3\cdot 0,1=0,006$$

Теорема сложения вероятностей несовместных событий.

Теорема 5. Вероятность наступления хотя бы одного из двух несовместных событий A или B равна сумме вероятностей этих событий.

$$\boxed{P(A+B)=P(A)+P(B)} \qquad (12)$$

Пример: В денежно - вещевой лотерее на каждые 10000 билетов разыгрывается 150 вещевых и 50 денежных выигрышей. Чему равна вероятность выигрыша?

$n=10000$
$m_в=150$
$m_д=50$
$P(C)-?$

C – выигрыш
A – вещевой выигрыш | несовместные
B – денежный выигрыш | несовместные
$C=A+B$ (или вещевой, или денежный)

$$P(C)=P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{150}{10000}+\frac{50}{10000}=\frac{200}{10000}=0,02$$

Следствие 1. Данная теорема справедлива для «**n**» несовместных событий.

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots\cdot+P(A_n)$$

Следствие 2. Сумма вероятностей событий, образующих полную систему, равна 1.

$$\boxed{P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_k)=1}$$

Следствие 3. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1.

$$\boxed{P(A)+P(\overline{A})=1},$$

где $A-$данное событие, $\overline{A}-$противоположное событие.

Данное утверждение следует из того, что противоположные события образуют полную систему событий. Принято обозначать $P(A)=p;\ P(\overline{A})=q$. Следовательно $\boxed{p+q=1}$.

Пример. Если вероятность попадания в цель p=0,8, то вероятность промаха q= 0,2.

Теорема сложения для совместных событий.

Теорема 6. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления.

$$\boxed{P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)} \qquad (13)$$

В случае 3-х и более совместных событий формула будет очень громоздка. Так, для 3-х событий:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

Поэтому проще перейти к противоположному событию и использовать формулу:

$$P(A_1+A_2+...+A_к)=1-P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot ...\cdot P(\overline{A_к}) \text{ или } \boxed{P(A)=1-q_1\cdot q_2\cdot q_3.....},$$

т.е.

Определение 3. Вероятность появления **<u>хотя бы одного</u>** из событий $A_1, A_2 ... A_к$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A_1}$; $\overline{A_2}$ ... $\overline{A_к}$.

Частный случай. Если события $A_1, A_2 ... A_к$ имеют одинаковую вероятность, равную «**р**», то вероятность появления хотя бы одного из этих событий равна: $P(A)=1-q^k$

Пример. В типографии имеется 4 плоскопечатные машины. Для каждой машины вероятность того, что она работает в данный момент = 0,9. К.в.т., ч. в данный момент работает хотя бы одна машина (событие *А*).

$$\left.\begin{array}{c} p=0,9 \\ q=1-0,9=0,1 \\ \hline P(A)-? \end{array}\right| P(A)=1-q^4=1-(0,1)^4=1-0,0001=0,9999$$

<u>*Замечание*</u> При использовании формулы (4) следует иметь в виду, что события *А* и *В* могут быть как независимыми, так и зависимыми.

Для независимых событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)$$

Для зависимых событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P_A(B)$$

Пример 1. Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятность отказа1-го из них – 0,05;2-го - 0,08. К.в.т.,ч. откажет все устройство, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент?

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = P(A_1) = 0,05 \\ \underline{P_2 = P(A_2) = 0,08} \\ \quad P(A_1 + A_2) - ? \\ \quad q_1 = 0,95 \\ \quad q_2 = 0,92 \end{array}\right\| \begin{array}{l} A_1 \text{ и } A_2 - \text{совместные события, независимые} \\ 1)\ P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2) = 0,05 + 0,08 - 0,05 \cdot 0,08 = \\ \quad = 0,13 - 0,004 = 0,126 \\ 2)\ P(A_1 + A_2) = 1 - q_1 \cdot q_2 = 1 - 0,95 \cdot 0,92 = 1 - 0,874 = 0,126 \\ \\ \end{array}$$

Пример 2. На 100 лотерейных билетов приходится 5 выигрышных. К.в. выигрыша хотя бы по одному билету, если приобретено 2.

$$\begin{array}{l} \\ n = 100 \\ \underline{m = 2} \\ \\ \\ \end{array}\left| \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} A_1 - \text{выиграл 1-й билет} \\ A_2 - \ - \ \| - \ \ 2 - \text{й билет} \end{array}\right| \text{совместные, зависимые} \\ P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) = \frac{5}{100} + \frac{5}{100} - \frac{5}{100} \cdot \frac{4}{99} = 0,098 \\ \Rightarrow \text{оба} : 2 - \text{ой билет выиграет, если выиграл 1-й} \\ \\ \end{array}\right.$$

Вероятность появления только одного события.

Пусть вероятности появления каждого из двух независимых событий A_1 и A_2 соответственно равны p_1 и p_2. Найдем вероятность появления только одного из этих событий. Введем обозначения событий:

B_1 - появилось только событие A_1;

B_2 - появилось только событие A_2.

Появление события B_1 равносильно появлению события $A_1 \cdot \overline{A_2}$ (появилось первое событие и не появилось второе), т.е. $B_1 = A_1 \cdot \overline{A_2}$

Появление события B_2 <=> появлению события $\overline{A_1} \cdot A_2$ (появилось второе событие и не появилось первое), т.е. $B_2 = \overline{A_1} \cdot A_2$

Таким образом, чтобы найти вероятность появления только одного из событий A_1 и A_2, достаточно найти вероятность появления одного, безразлично какого, из событий B_1 и B_2. События B_1 и B_2 несовместны, поэтому применима теорема сложения:

$$P(B_1 + B_2) = P(B_1) + P(B_2) \qquad (*)$$

Найдем вероятности каждого из событий B_1 и B_2. События A_1 и A_2 независимы, => независимы события A_1 и $\overline{A_2}$, а также $\overline{A_1}$ и A_2, поэтому применима теорема умножения:

$$P(B_1) = P(A_1 \cdot \overline{A_2}) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) = p_1 \cdot q_2$$

$$P(B_2) = P(\overline{A_1} \cdot A_2) = P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) = q_1 \cdot p_2$$

Подставим эти вероятности в соотношение (*) и найдем искомую **вероятность появления только одного из событий** A_1 и A_2:

$$\boxed{P(B_1+B_2)=p_1\cdot q_2+q_1\cdot p_2}$$

Пример. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для 1-го стрелка = 0,7, для 2-го = 0,8. К.в.т.,ч. при одном залпе в мишень попадет только один стрелок.

$p_1=0,7$

$p_2=0,8$

$q_1=0,3$

$q_2=0,2$

$P(B_1+B_2)-?$

$$P(B_1+B_2)=p_1\cdot q_2+q_1\cdot p_2=0,7\cdot 0,2+0,3\cdot 0,8=0,14+0,24=0,38$$

Задачи для решения в аудитории

1. Из участников танцевального кружка, состоящего из 8 девушек и 4 юношей, выбирают 9 человек для определенного танца. Найти вероятность того, что среди участников окажутся все юноши?

2. В урне 8 красных и 6 голубых шаров. Из урны последовательно без возвращения извлекается 3 шара. Найти вероятность, что все 3 шара голубые.

3. Бросаются две игральные кости. Какова вероятность появления хотя бы одной шестерки?

4. Вероятность того, что приобретенный товар произведен в Италии, равна 0,4, а того, что он произведен в Турции - 0,3. Какова вероятность того, что товар произведен в одной из этих стран?

5. Рабочий обслуживает три станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, для первого станка равна 0,9, для второго — 0,8, для третьего — 0,7. Найти: 1) вероятность того, что в течение часа ни один из трех станков не потребует внимания рабочего; 2) вероятность того, что в течение часа по крайней мере один из станков не потребует внимания рабочего.

6. Вероятность летной погоды равна 0,9, а вероятность того, что при условии летной погоды груз будет доставлен своевременно -0,8. Какова вероятность того, что груз будет доставлен своевременно?

7. Исследователь разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятность того, что формула окажется в первом справочнике, равна 0.6, во втором – 0.7, в третьем – 0.8. Какова вероятность того, что формула окажется:

а) только в одном справочнике;
б) только в двух справочниках;
в) во всех трех справочниках;
г) хотя бы в одном справочнике;
д) ни в одном справочнике;
е) хотя бы в двух справочниках;
ж) только в первом справочнике;
з) только во втором справочнике;
и) не менее чем в двух энциклопедиях.

8. В партии из 50 деталей имеется 10 бракованных. Какова вероятность того, что среди наудачу отобранных 20 деталей окажется 3 бракованных?

9. Прокуратура проверяет деятельность одного частного предпринимателя, который владеет тремя магазинами. Проверка проводится одним проверяющим в одном произвольно выбранном магазине. Вероятность выявить нарушения в первом магазине равна 0,1, во втором – 0,3, в третьем – 0,25. Какова вероятность того, что нарушения будут выявлены:

а) только в одном магазине; б) только в двух магазинах; в) во всех трех магазинах; г) хотя бы в одном магазине; д) ни в одном магазине; е) хотя бы в двух магазинах; ж) только в первом магазине; з) только во втором магазине; и) не менее чем в двух магазинах.

5.5 Формула полной вероятности

Пусть событие A может произойти только вместе с одним из попарно несовместных событий $H_1, H_2, ..., H_n$, образующих полную группу. Тогда, если произошло событие A, то это значит, что произошло одно из попарно несовместных событий $H_1A, H_2A, ..., H_nA$. Следовательно,

$$P(A)= P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(A) + ... + P(H_n)\cdot P_{H_n}(A) \qquad (14)$$

Эта формула называется ***формулой полной вероятности***. События H_1, $H_2, ..., H_n$ часто называют «гипотезами».

Пример . В магазин поступили электрические лампочки одного типа, изготовленные на четырех ламповых заводах: с 1-го завода 250 шт., со 2-го – 525 шт., с 3-го – 275 шт. и с 4-го – 950 шт. Вероятность того, что лампочка прогорит более 1500 часов, для 1-го завода равна 0,15, для 2-го – 0,30, для 3-го – 0,20, для 4-го – 0,10. При раскладке по полкам магазина лампочки были перемешаны. Какова вероятность того, что купленная лампочка прогорит более 1500 часов?

Решение. Пусть A – событие, состоящее в том, что лампочка прогорит более 1500 часов, а H_1, H_2, H_3 и H_4 – гипотезы, что она изготовлена соответственно 1, 2, 3 или 4-м заводом. Так как всего лампочек 2000 шт., то вероятности гипотез соответственно равны:

$$P(H_1)=\frac{250}{2000}=0{,}125; \qquad P(H_2)=\frac{525}{2000}=0{,}2625; \qquad P(H_3)=\frac{275}{2000}=0{,}1375$$

$$P(H_4)=\frac{950}{2000}=0{,}475.$$

Далее, из условия задачи следует, что $P_{H_1}(A) = 0{,}15$; $P_{H_2}(A) = 0{,}3$; $P_{H_3}(A) = 0{,}2$; $P_{H_4}(A) = 0{,}1$.

Используя формулу полной вероятности (8), получаем:

$$P(A) = 0{,}125\cdot 0{,}15 + 0{,}2625\cdot 0{,}3 + 0{,}1375\cdot 0{,}2 + 0{,}475\cdot 0{,}1 = 0{,}1725$$

Задачи для решения в аудитории

1. Детали для обработки поступают из двух заготовительных цехов: из первого цеха – 70%, из второго – 30%, причем продукция первого цеха имеет 10% брака, а продукция второго цеха – 20% брака. Какова вероятность того, что случайно взятая деталь будет без дефектов?

2. Экономист полагает, что вероятность роста стоимости акций некоторой компании в следующем году будет равна 0,75, если экономика страны будет на подъеме; и эта же вероятность будет равна 0,3, если экономика страны не будет успешно развиваться. Вероятность экономического подъема в новом году равна 0,8. Оценить вероятность того, что акции компании поднимутся в цене в следующем году.

3. В университетской лаборатории имеется 6 вычислительных автоматов и 4 полуавтомата. Вероятность того, что за время выполнения некоторого расчета автомат не выйдет из строя равна 0,95, для полуавтомата – 0,8. Лаборант производит расчет на наудачу взятой машине. Найти вероятность того, что до окончания расчета машина не выйдет из строя.

5.6 Формула Байеса

Формула Байеса имеет вид:

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P(A/H_i)} \qquad (15)$$

Пример 1. На склад поступило 1000 подшипников. Из них 200 изготовлены на 1-м заводе, 460 – на 2-м и 340 – на 3-м. Вероятность того, что подшипник окажется нестандартным, для 1-го завода равна 0,03, для 2-го – 0,02, для 3-го – 0,01. Взятый наудачу подшипник оказался нестандартным. Какова вероятность того, что он изготовлен 1-м заводом?

Решение. Пусть A – событие, состоящее в том, что взятый Подшипник нестандартный, а H_1, H_2, H_3 – гипотезы, что он изготовлен соответственно 1-м, 2-м или 3-м заводом. Вероятности указанных гипотез составляют:

$$P(H_1)=\frac{200}{1000}=0{,}2;\ P(H_2)=\frac{460}{1000}=0{,}46;\ P(H_3)=\frac{340}{1000}=0{,}34$$

Из условия задачи следует, что $p_1 = P_{H_1}(A) = 0{,}03$; $p_2 = P_{H_2}(A) = 0{,}02$; $p_3 = P_{H_3}(A) = 0{,}01$.

Найдем $P_A(H_1)$, т.е. вероятность того, что подшипник, оказавшийся нестандартным, изготовлен 1-м заводом. По формуле Бейеса получаем:

$$P_A(H_1)=\frac{P(H_1)p_1}{P(H_1)p_1+P(H_2)p_2+P(H_3)p_3}=\frac{0{,}2\cdot 0{,}03}{0{,}2\cdot 0{,}03+0{,}46\cdot 0{,}02+0{,}34\cdot 0{,}01}\approx 0{,}322$$

Таким образом, вероятность гипотезы, что подшипник изготовлен 1-м заводом, изменилась после того, как стало известно, что он нестандартен.

Задачи для решения в аудитории

1. У рыбака имеется 3 излюбленных места для ловли рыбы, которые он посещает с равной вероятностью каждое. Если он закидывает удочку на первом месте, рыба клюет с вероятностью 0,5; на втором – 0,7; на третьем – 0,6. Известно, что рыбак, выйдя на ловлю рыбы, три раза закинул удочку, и рыба клюнула только один раз. Найти вероятность того, что он удил рыбу на первом месте.

2. В специализированную больницу поступают в среднем 50% больных с заболеваниям H, 35% – с заболеванием X, 15% – с заболеванием Z. Вероятность полного излечения болезни H равна 0,7; для болезней X и Z вероятности излечения соответственно равны 0,8 и 0,9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что он страдал заболеванием H.

3. Из числа авиалиний аэропорта 60 % - местные, 30 % - по СНГ, 10 % - международные. Среди пассажиров местных авиалиний 50 % бизнесменов, на линиях СНГ таких пассажиров 60 %, на международных - 90 %. Чему равна вероятность, что случайно выбранный пассажир: а) бизнесмен, б) прибыл из стран СНГ, в) прибыл местным рейсом, г) прибыл международным рейсом?

5.7 Последовательные испытания. Формула Бернулли

Всякую комбинацию, в которую A входит m раз и $\bar{A}$ входит n-m раз, назовем благоприятной. Количество благоприятных комбинаций равно количеству k способов, которыми можно выбрать m чисел из данных n. Таким образом, оно равно числу сочетаний из n элементов по m, т.е. $k = C_n^m$

Все благоприятные комбинации являются, очевидно, несовместными. Поэтому (на основании аксиомы сложения вероятностей): $P_n(m) = P(B_1) + P(B_2) + \ldots + P(B_i) = C_n^m p^m q^{n-m}$

Следовательно,

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} \quad \text{- } \textit{формула Бернулли} \qquad (16)$$

Пример 1. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,6. Какова вероятность того, что 8 выстрелов дадут 5 попаданий?

Решение. Здесь n=8; m=5; p=0,6; q=1-0,6=0,4.

Используя формулу (10), имеем $P_8(5) = \frac{8!}{5!(8-5)!}(0{,}6)^5(0{,}4)^3 \approx 0{,}28$

Часто необходимо знать, при каком значении m вероятность принимает наибольшее значение, т.е. требуется найти *наивероятнейшее число* μ *наступления события A* в данной серии опытов. Можно доказать, что число μ должно удовлетворять двойному неравенству:

$$np - q \le \mu \le np + p$$

Заметим, что сегмент $[np\text{-}q; np+p]$, в котором лежит μ, имеет длину $(np+p)\text{-}(np\text{-}q)=p+q=1$. Поэтому, если какой-либо из его концов не является целым числом, то между этими концами лежит единственное целое число, и μ определено однозначно. В том случае, если оба конца — целые числа, имеются два наивероятнейших значения: np-q и $np+p$.

Пример 2. Орудие выпустило 36 снарядов с вероятностью попадания равна 0,85. Найти наивероятнейшее число попаданий в цель.

Решение. $36 \cdot 0{,}85 - 0{,}15 \le \mu \le 36 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}85$

$30{,}45 \le \mu \le 31{,}55$, следовательно, μ=31

Задачи для решения в аудитории

1. Производство дает 60% продукции первого сорта. Какова вероятность того, что из 6 изделий окажется: а) 4 изделия первого сорта; б) не менее 4 изделий первого сорта.

2. В городе 10 коммерческих банков. У каждого риск банкротства в течении года составляет 10 %. Чему равна вероятность того, что в течении года обанкротится не больше одного банка?

3. При каком числе выстрелов наивероятнейшее число попаданий равно 16, если вероятность промаха в отдельном выстреле равна 0,3.

4. Доля изделий высшего сорта на данном предприятии составляет 31%. Чему равно наивероятнейшее число изделий высшего сорта в случайно отобранной партии из 75 изделий?

5.8 Вероятность редких событий. Формула Пуассона

Формула Пуассона выводится из формулы Бернулли и после ряда преобразований выглядит следующим образом:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad (17)$$

где $\lambda = np$ и k – количество раз, которое произойдет редкое событие.

Все значения сведены в таблицу и представлены в приложении 1.

Пример. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение некоторого времени t равна 0,002. Найти вероятность того, что за это время откажут ровно 3 элемента.

Решение. $\lambda = np = 1000 \cdot 0{,}002 = 2,\ P_{1000}(3) = 0{,}18$.

Задачи для решения в аудитории

1. Среди семян пшеницы высшего сорта 0,04% сорняков. Какова вероятность того, что среди случайно отобранных 5000 семян обнаружиться 5 семян сорняков?

2. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,001. Какова вероятность того, что при 1000 выстрелов будет не более двух попаданий?

3. На предприятии 1000 единиц оборудования определенного вида. Вероятность отказа единицы оборудования в течение часа составляет 0,001. Чему равна вероятность того, что в течение часа откажут как минимум две единицы оборудования?

5.9 Локальная теорема де Муавра-Лапласа

Теорема. Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность $P_n(m)$ появления события A в n испытаниях равно m раз приближенно равна значению функции:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \qquad (18)$$

В связи с трудностями вычисления по формуле (18) созданы специальные таблицы, представленные в приложении 2.

На практике применяют локальную теорему в виде:

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \quad \text{где} \quad x = \frac{|m - np|}{\sqrt{npq}}$$

Пример 1. Найти вероятность того, что 80 из 1000 покупателей приобретут мужскую обувь, если вероятность покупки обуви p=0,11 (по данным из наблюдений за предыдущий период).

Решение. p=0,11 q=1–0,11=0,89 n=1000 m=80

$$x=\frac{|\ 80-1000\cdot 0{,}11\ |}{\sqrt{1000\cdot 0{,}11\cdot 0{,}89}}=\frac{|-30|}{\sqrt{97{,}9}}=\frac{30}{9{,}9}=3{,}03$$

$$P_{1000}(80)\approx\frac{\varphi(3{,}03)}{\sqrt{97{,}9}}\approx\frac{0{,}0040}{9{,}9}\approx 0{,}0004$$

Поскольку функция $\varphi(x)$ четная, то $\varphi(x)=\varphi(-x)$.

Задачи для решения в аудитории

1. Вероятность того, что элемент прибора не выйдет из строя, равна 0,8. Какова вероятность того, что из 600 элементов прибора за время его работы не выйдет из строя 450 элементов?

2. На каждые 100 посеянных зерен всходит в среднем 85. Какова вероятность того, что из 1000 посеянных зерен взойдет 840?

3. В банк поступило 100 авизо. Подозревают, что среди них 20 фальшивых. Тщательной проверке подвергается 60 случайно отобранных авизо. Чему равна вероятность, что в ходе проверки обнаружится 10 фальшивых?

5.10 Интегральная формула Лапласа

Если вероятность р появления событий А в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1 , то:

$$P_n(a\le k\le b)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2}e^{-\frac{x^2}{2}}dx,\quad \text{где}\quad x_1=\frac{a-np}{\sqrt{npq}},\qquad x_2=\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\qquad(19)$$

$\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ - функция Лапласа.

Функция $Ф(x)$ является нечетной, поэтому $Ф(-x)=-Ф(x)$. При значениях $x>5$ считается $Ф(x)\approx 0{,}5$.

Значения функции даны в приложении 3.

На практике интегральная теорема Лапласа применяется в виде :

$$P_n(a<k<b)=Ф(x_2)-Ф(x_1)$$

Пример . Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна p=0,85. Найти вероятность того, что событие появится не менее 70 раз и не более 95 раз.

Решение. $p=0{,}85$ $q=1-0{,}85=0{,}15$ $n=100$ $a=70$ $b=95$

$$x_1=\frac{70-100\cdot 0{,}85}{\sqrt{100\cdot 0{,}85\cdot 0{,}15}}=\frac{70-85}{\sqrt{12{,}75}}=-\frac{15}{3{,}75}=-4$$

$$x_2=\frac{95-100\cdot 0{,}85}{\sqrt{100\cdot 0{,}85\cdot 0{,}15}}=\frac{95-85}{\sqrt{12{,}75}}=-\frac{10}{3{,}75}=2{,}66$$

$P_{100}(70\le k\le 95)\approx Ф(2{,}66)-Ф(-4)\approx 0{,}4961+0{,}499968=0{,}996068$

Задачи для решения в аудитории

1. Производство дает 40% продукции первого сорта. Какова вероятность того, что из 600 первосортных изделий окажется от 228 до 252?

2. В инкубаторе вероятность вывода петушка равна 0,5. Определить вероятность того, что из 10000 выведенных цыплят число петушков будет от 4950 до 5150?

3. Фирма выпускает 75 % продукции первого сорта. Какова вероятность того, что из 300 изделий не менее 280 будут первосортными.

ГЛАВА 6 СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

6.1 Понятие случайной величины и случайного вектора и закон их распределения

Случайной величиной (далее будем обозначать СВ) называют числовую величину, значение которой зависит от того, какой именно элементарный исход произошел в результате опыта со случайным исходом. Множество всех значений, которые случайная величина может принимать, называют ***множеством значений*** этой случайной величины.

Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями. Закон можно задать аналитически, таблично, графически.

Простейшей формой задания закона распределения дискретной случайной величиной X (*ДСВ X*) является ряд распределения.

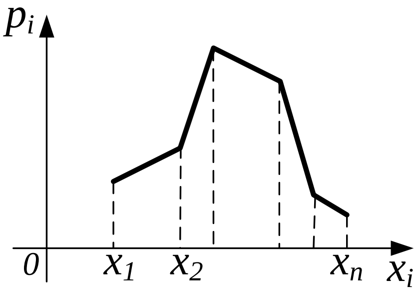
Рядом распределения вероятностей *ДСВ X* называют таблицу, в которой перечислены все возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности $p_i = P\left(X = x_i\right)$ того, что случайная величина примет эти значения.

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	p_n
p_i	$p_1 = P\left(X = x_1\right)$	$p_2 = P\left(X = x_2\right)$	$\ldots$	$p_n = P\left(X = x_n\right)$

Так как события $X_1, \ldots, X_n$ несовместны, потому что *СВ* может принять в результате опыта только одно значение, и образуют полную группу событий, то:

$$\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Для наглядности ряд распределения представляют графически. Для этого все возможные значения случайной величины откладывают по оси *0x*, а по оси *0y* - соответствующие вероятности. Вершины полученных ординат обычно соединяют отрезками прямых.



Такая фигура называется ***многоугольником распределения.***

Формы закона распределения

а) Функция распределения и её свойства

Функцией распределения *СВ X* называется функция *F(x)* выражающая для каждого *x* вероятность того, что *СВ X* примет значение меньше *x:*

$$F(x)=P(X<x).$$

Функцию *F(x)* иногда называют интегральной функцией распределения или интегральным законом распределения.

Для *ДСВ X*, которая может принимать значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, функция распределения будет иметь вид:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$$

где символ $x_i < x$ под знаком суммы обозначает, что суммирование распространяется на все те возможные значения СВ, которые по своей величине меньше аргумента *x*.

Основные свойства функции распределения

Свойство 1. $0 \le F(x) \le 1.$

Свойство 2. Если $\beta \ge \alpha$, то $F(\beta) \ge F(\alpha).$

Свойство 3. $p(\alpha \le x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$

Свойство 4. $F(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0; \quad F(\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1;$

$F(-\infty) = P(X < -\infty) = 0; \quad F(\infty) = P(X < \infty) = 1.$

б) Плотность вероятности и её свойства

Предел отношения вероятности попадания *СВ X* на интервал, содержащий точку *x*, к длине этого интервала, когда $\Delta x \to 0$, называется плотностью распределения вероятности *СВ* в точке *x* и обозначается *f(x).*

$$f(x) = F'(x).$$

Вероятность попадания *СВ X* на (α, β)равна интегралу:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

Функция распределения *F(x)*, выраженная через плотность распределения *f(x)*, имеет вид $F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$

Основные свойства плотности вероятности

1. $f(x) \ge 0.$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

Если интервал возможных значений *СВ* имеет конечные пределы *(а, в)*, то $f(x)=0$ вне интервала $\int_a^в f(x)dx=1.$

6.2 Числовые характеристики

а) Математическое ожидание случайной величины

Математическим ожиданием (МОЖ) ДСВ Х называется сумма парных произведений возможных значений СВ на вероятности этих значений:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i. \qquad (20)$$

Для непрерывной случайной величины (НСВ):

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx,$$

где *f(x)* - плотность вероятности.

Простейшие свойства математического ожидания

1) $M(C)=C$.
2) $M(CX)=CM(X)$.
3) $M(X_1+\ldots+X_n) = M(X_1) +\ldots+ M(X_n)$

б) Дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной величины

Характеристики, показывающие, насколько тесно сгруппированы возможные значения случайной величины около центра рассеивания (МОЖ), называются ***характеристиками рассеивания.***

Такими характеристиками являются дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

Дисперсией СВ называется математическое ожидание квадрата ее отклонения, обозначается:

$$D(X)=M(X - a)^2$$

Из определения следует, что дисперсия *СВ Х* вычисляется по формуле:

$$D(X)=M(X^2) - (M(X))^2 \qquad (21)$$

Дисперсия *СВ* обладает следующими свойствами:
1) $D(C) = 0;$
2) $D(CX) = C^2D(X)$.
3) $D(X_1+\ldots+X_п) = D(X_1) +\ldots+ D(X_п)$
$D(X_1-\ldots-X_п) = D(X_1) +\ldots+ D(X_п)$

Дисперсия *СВ* является удобной характеристикой рассеивания возможных значений *СВ*, однако лишена наглядности, т.к. имеет размерность квадрата *СВ*.

Поэтому для характеристики отклонений *СВ X*, имеющей размерность, одинаковую с размерностью *СВ*, вводится понятие стандарта.

Средним квадратическим отклонением (СКО) *СВ X* называется арифметический корень из дисперсии, обозначается:

$$\sigma(x)=\sqrt{D(x)}.$$

Решение типовых примеров

Пример 1. Ряд распределения СВ X – «Числа попаданий» имеет вид:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,24	0,46	0,26	0,04

Найти функцию распределения.

Решение.

При:

1) $x \le 0 \quad F(x)=P(X<0)=0.$

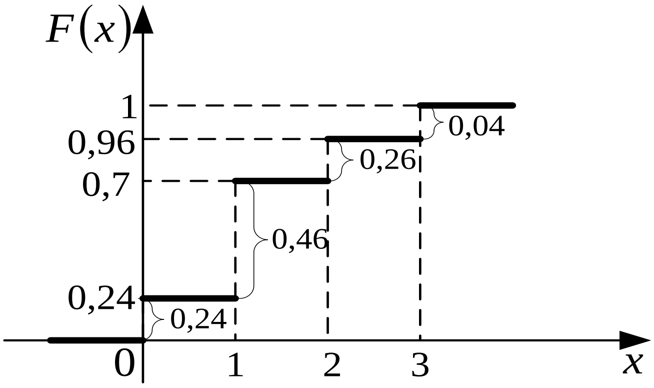
2) $0<x\le 1 \quad F(x)=P(X<1)=P(X=0)=0,24.$

3) $1<x\le 2 \quad F(x)=P(X<2)=P(X=0)+P(X=1)=0,24+0,46=0,7.$

4) $2<x\le 3 \quad F(x)=P(X<3)=P(X<2)+P(X=2)=0,7+0,26=0,96.$

5) $x>3 \quad F(x)=P(X<3)+P(X=3)=0,96+0,04=1.$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 0,24, & 0<x\le 1;\\ 0,7, & 1<x\le 2;\\ 0,96, & 2<x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$$



Пример 2. Функция распределения непрерывной случайной величины задана выражением:

$$F(x)=\begin{cases}0, & при \quad x\le 1\\ a(x-1)^2, при & 1<x\le 3\\ 1, & при \quad x>3.\end{cases}$$

Найти:

1. коэффициент *a*;
2. $P(1\le X<2)$;
3. построить график функции *F(x)*.

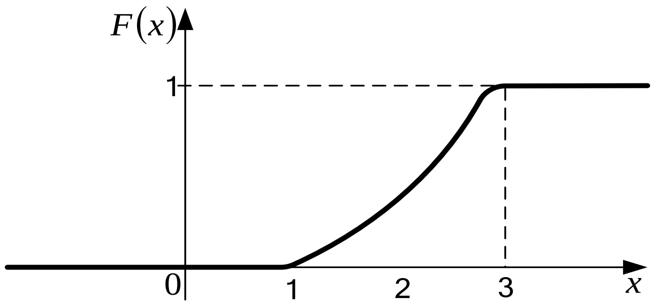
Решение.

1) Так как функция распределения непрерывной *СВ X* непрерывна, то при $x = 3$ имеем:

$$a(3-1)^2=1; \quad a=\frac{1}{4};$$

2) $P(1\le X<2)=F(2)-F(1)=\frac{1}{4}(2-1)^2-\frac{1}{4}(1-1)^2=\frac{1}{4};$

3)



Пример 3. Независимые случайные величины X и Y заданы законом распределения:

X	-3	1	2	3
p_i	0,1	0,4	0,3	…

Y	-1	2	3	4
p_i	0,3	0,2	0,1	…

Найти среднее квадратическое отклонение случайной величины $Z=3X-5Y^2$.

Решение. Найдем недостающие вероятности в законах распределения, зная, что сумма вероятностей возможных значений случайной величины равна 1. Таким образом, P(X=3)=0,2, а P(Y=4)=0,4.

Из свойств дисперсии следует:

$$D(Z)=D(3X-5Y^2)=D(3X)+D(5Y^2)=9D(X)+25D(Y)$$

Найдем дисперсию случайных величин X и Y.

$$D(X)=M(X^2)\ -\ (M(X))^2=(-3)^2\cdot 0,1+1^2\cdot 0,4+2^2\cdot 0,3+3^2\cdot 0,2-$$
$$-((-3)\cdot 0,1+1\cdot 0,4+2\cdot 0,3+3\cdot 0,2)=3$$

$$D(Y)=M(Y^2)\ -\ (M(Y))^2=(-1)^2\cdot 0,3+2^2\cdot 0,2+3^2\cdot 0,1+4^2\cdot 0,4-$$
$$-((-1)\cdot 0,3+2\cdot 0,2+3\cdot 0,1+4\cdot 0,4)=6,4$$

Следовательно, $D(Z)=9\cdot 3+25\cdot 6,4=187$.

Тогда $\sigma(Z)=\sqrt{187}$

Пример 4. Случайная величина X задана законом распределения:

X	-3	1	2	3
p_{i}	0,1	0,4	0,3	0,2

Найти дисперсию случайной величины $Z=3X^2+2X+5$.

Решение. *D(Z)=M(Z²) - (M(Z))²*

Т.к. случайные величины X и X^2 не являются независимыми, то закон распределения случайной величины Z примет вид:

Z	$3(-3)^2+2(-3)+5=26$	10	21	38
p_{i}	0,1	0,4	0,3	0,2

Тогда закон распределения случайной величины Z^2 примет вид:

Z	676	100	441	1444
p_{i}	0,1	0,4	0,3	0,2

Таким образом,

$$D(Z)=M(Z^2)\ -\ (M(Z))^2=676\cdot 0,1+100\cdot 0,4+441\cdot 0,3+1444\cdot 0,2-$$
$$-(26\cdot 0,1+10\cdot 0,4+21\cdot 0,3+38\cdot 0,2)=508,2$$

Пример 5. Обстреливается 5 целей. Вероятность поражения одной цели равна 0,6. Найти математическое ожидание числа пораженных целей и дисперсию.

Решение.

Пусть СВ X - число пораженных целей. Её возможные значения 0,1, 2, 3, 4, 5. Вычисляя вероятности возможных значений СВ по формуле Бернулли при $n = 5$, $p = 0,6$, $q = 0,4$ получим следующий ряд распределения.

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,01024	0,0768	0,2304	0,3456	0,2592	0,07776

По формуле $M\left(X\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i$, находим:

$$M\left(X\right)=0\cdot 0,01024+1\cdot 0,0768+2\cdot 0,2304++3\cdot 0,3456+4\cdot 0,2592+5\cdot 0,07776=3.$$

Для нахождения *D(X)* составим ряд:

x_i^2	0	1	4	9	16	25
p_i	0,01024	0,0768	0,2304	0,3456	0,2592	0,07776

$$D(X)=\sum_{i=0}^{6}x_i^2 p_i-m^2=0\cdot 0,01024+1\cdot 0,0768+4\cdot 0,2304+$$
$$+9\cdot 0,3459+16\cdot 0,2592+25\cdot 0,07776-3^2=1,2027.$$

$$\sigma\left(X\right)=\sqrt{D\left(\tilde{O}\right)};\qquad \sigma\left(X\right)=1{,}097.$$

Пример 6. Непрерывная СВ задана плотностью вероятности:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{8}x^2, & при \quad 0\le x\le 2\\ 0 \quad , & при \quad x<0 \quad и \quad x>2.\end{cases}$$

Найти $M\left(X\right)$ и *D(X)*.

Решение.

$$M\left(X\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf\left(x\right)dx \quad и \quad D\left(X\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f\left(x\right)dx-M^2\left(X\right)$$

$$M\left(X\right)=\int\limits_0^2 x\cdot\frac{3}{8}x^2dx=\frac{3}{8}\int\limits_0^2 x^3dx=\frac{3}{8}\cdot\frac{x^4}{4}\bigg|_0^2=\frac{3}{2};$$

$$D\left(X\right)=M\left(X^2\right)-\left(M\left(X\right)\right)^2=\int\limits_0^2 x^2\cdot\frac{3}{8}x^2dx-\frac{9}{4}=\frac{3}{8}\int\limits_0^2 x^4dx-\frac{9}{4}=\frac{3}{8}\cdot\frac{x^5}{5}\bigg|_0^2-\frac{9}{4}=$$

$$=\frac{12}{5}-\frac{9}{4}=\frac{3}{20};$$

$$\sigma\left(X\right)=\sqrt{\frac{3}{20}}=0{,}387.$$

Задачи для решения в аудитории

1. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения:

x_i	-2	1	2	3
p_i	0,08	0,4	0,32	0,2

Найти:

а) функцию распределения $F\left(x\right)$;

б) вероятность событий $A=\{x<2\}$, $B=\{1\le x<3\}$, $C=\{1<x\le 3\}$.

в) построить полигон и график функции $F\left(x\right)$.

г) найти M(X), D(X), σ(X).

д) Найти дисперсию случайной величины $Z=2X^2+4X-2$.

2. Студенты одной из групп экономического факультета сдают все экзамены только на хорошо и отлично. Вероятность получения отличной оценки равна 0,6, а хорошей – 0,4. В течение экзаменационной сессии студенту этой группы предстоит сдать 4 экзамена. Найти закон распределения случайной величины X - числа полученных им баллов.

3. Известно, что в определенном городе 20 % горожан предпочитают добираться на работу личным автотранспортом. Случайно выбраны 4 человека.

а) Составьте закон распределения числа людей предпочитающих добираться на работу личным автотранспортом и постройте полигон распределения.

б) Найдите функцию распределения и постройте ее график.

4. На предприятии работает 200 человек. Из них 10 получают по 1800 рублей, 40 - по 1500 рублей, 80 человек - по 1200 рублей, 50 человек - по 1000 рублей и 20 человек - по 700 рублей. Определить среднюю заработную плату работника (рассматривая зарплату, как дискретную случайную величину), ее дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

5. Дисперсия случайной величины равна 5. Найти дисперсию величин: $(X-1)$; $(-X)$; $(3X+6)$.

6. Найти математическое ожидание случайной величины $Z = X + 2Y$, если $M(X) = 5,\ M(Y) = 3$.

6. Непрерывная СВ задана функцией распределения.

$$F\left(x\right)=\begin{cases}0, & при\ x\le 0;\\ \dfrac{x^2}{9}, & при\ 0<x\le 3;\\ 1, & при\ x>3.\end{cases}$$

Требуется: а) составить *f(x)*.

б) найти: *M(X); D(X)*; σ ; $P\left(1<X<3\right)$.

а) построить графики функций *F(x)* и *f(x)*.

6.3 Законы распределения случайных величин

6.3.1 Биномиальное, полиномиальное распределения

Дискретная случайная величина X имеет биномиальный закон распределения, если она принимает значения 0, 1, 2,…, m,…, n с вероятностями

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}, \qquad (22)$$

где $0 < p < 1; \quad q = 1 - p; \quad m = \overline{0, n}.$

Вероятность $P(X=m)$ находится по формуле Бернулли, следовательно, ***биномиальный закон распределения*** представляет собой закон распределения числа $X = m$ наступлений события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых оно может произойти с одной и той же вероятностью.

Ряд распределения биномиального закона имеет вид

x_i	0	1	…	m	…	n
p_i	$P(X=0)=q^n$	$P(X=1)=C_n^1 p^1 q^{n-1}$	…	$P(X=m)=C_n^m p^m q^{n-m}$	…	$P(X=n)=p^n$

Для случайной величины X распределенной по биномиальному закону, числовые характеристики находятся по формулам

$$M(X) = np; \quad D(X) = npq; \quad \sigma_x = \sqrt{npq}. \qquad (23)$$

Биномиальный закон распределения используется в теории стрельбы, при описании функционирования систем массового обслуживания в теории стрельбы и так далее.

Пример. Проверкой качества установлено, что из каждых 100 деталей не имеют дефектов 75 штук в среднем. Составить биномиальное распределение вероятностей числа пригодных деталей из взятых наудачу 6 деталей.

Решение

Из условия задачи следует, что $p = 0{,}75, \quad q = 0{,}25, \quad n = 6$.

По формуле 4.1 находим

$P_6(0) = 1 \cdot (0{,}25)^6 \approx 0{,}0002$;

$P_6(1) = 6 \cdot (0{,}75) \cdot (0{,}25)^5 \approx 0{,}004$;

$P_6(2) = 15 \cdot (0{,}75)^2 \cdot (0{,}25)^4 \approx 0{,}033$;

$P_6(3) = 20 \cdot (0{,}75)^3 \cdot (0{,}25)^3 \approx 0{,}132$;

$P_6(4) = 15 \cdot (0{,}75)^4 \cdot (0{,}25)^2 \approx 0{,}297$;

$P_6(5) = 6 \cdot (0{,}75)^5 \cdot (0{,}25) \approx 0{,}356$;

$P_6(6) = 1 \cdot (0{,}75)^6 \approx 0{,}178$.

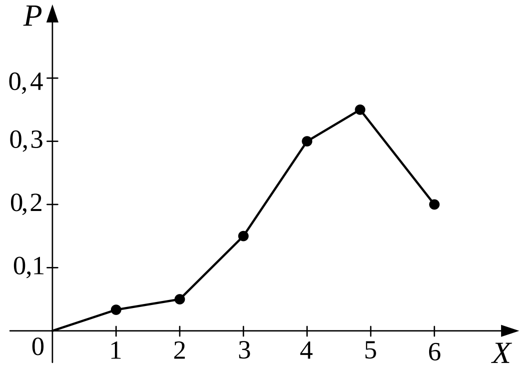
Закон распределения случайной величины X - «числа стандартных деталей из 6 взятых наудачу» можно задать следующей таблицей:

x_i	0	1	2	3	4	5	6
p_i	0,000	0,004	0,033	0,132	0,297	0,356	0,178

Убедимся в том, что сумма всех вероятностей равна единице:

$$0{,}004+0{,}033+0{,}132+0{,}297+0{,}356+0{,}178=1.$$

Графическое представление этого биномиального распределения дано на рисунке



6.3.2 Распределение Пуассона

Дискретная случайная величина X имеет распределение Пуассона, если она принимает значение 0, 1, 2, …, *m*, ... (бесконечное, но счетное множество значений) с вероятностями

$$P(X=m)=\frac{a^m e^{-a}}{m!}. \qquad (24)$$

Ряд распределения закона Пуассона имеет вид

x_i	0	1	…	m	…
p_i	$P(X=0)=e^{-a}$	$P(X=1)=\frac{ae^{-a}}{1!}$	…	$P(X=m)=\frac{a^m e^{-a}}{m!}$	…

Закон Пуассона зависит от одного параметра *a*, который является одновременно математическим ожиданием и дисперсией случайной величины, т.е. $M(X)=a$; $D(X)=a$.

Можно доказать, что распределение Пуассона с параметром $a=np$ можно приближенно применять вместо биномиального, когда число опытов n очень велико, а вероятность p очень мала, т.е. в каждом отдельном опыте событие *a* появляется крайне редко.

Пример. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени T равна 0,002. Найти вероятность того, что за время T откажут ровно три элемента. Найти математическое ожидание и дисперсию числа отказов за время T.

Решение

По условию задачи $n=1000$, $p=0{,}002$, $m=3$. События состоящие в том, что время T три элемента откажут, независимы, число n велико, а вероятность p мала, поэтому воспользуемся распределением Пуассона, то есть формулой 4.4. Найдём a:

$$a=np=1000\cdot 0{,}002=2.$$

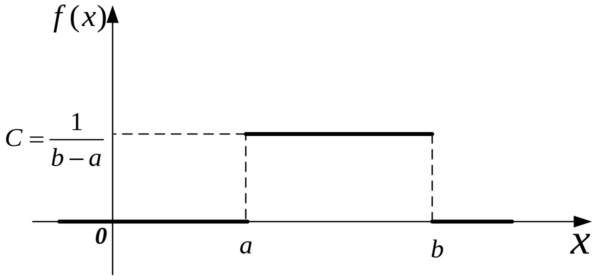
Тогда искомая вероятность равна $P_3 = \frac{2^3}{3!} e^{-2} = 0{,}180447$.

Так как $M(X) = a;\quad D(X) = a$, то $M(X) = 2;\quad D(X) = 2$.

6.3.3 Равномерное распределение

Непрерывная случайная величина X имеет равномерное распределение на $[a,b]$, если на этом отрезке плотность вероятности случайной величины постоянна, а вне его равна нулю, то есть, если

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x < a, \\ C, & \text{при} \quad a \le x \le b, \\ 0, & \text{при} \quad x > b. \end{cases}$$

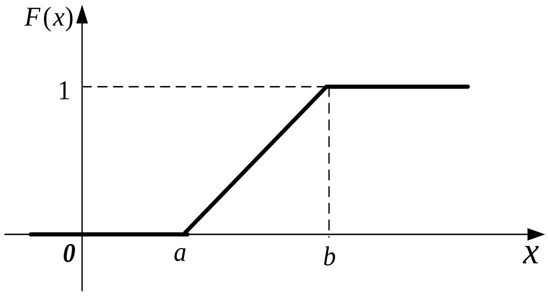


Тогда плотность вероятности *f(x)* имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \overline{\in} (a,b) \end{cases} \qquad (25)$$

Функция распределения для равномерного распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 1, & x > b. \end{cases} \qquad (26)$$



Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X, имеющей равномерное распределение

$$\begin{cases} M(X)=\dfrac{b+a}{2}, \\ D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}, \\ \sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}. \end{cases} \tag{27}$$

Одним из наиболее простых распределений системы непрерывных случайных величин является равномерное распределение.

Система двух непрерывных случайных величин (*X, У*) имеет равномерное распределение в области λ плоскости *ХОУ*, если плотность вероятности в точках области постоянна и равна нулю в остальных точках плоскости *ХОУ*:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{S_D}, & \textit{внутри} \quad D, \\ 0, & \textit{вне} \quad D, \end{cases}$$

где S_D - площадь области D.

Пример. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[2,7]$. Записать плотность распределения $f(x)$, функцию распределения $F(x)$ этой случайной величины. Найти её математическое ожидание и дисперсию.

Решение

Плотность распределения $f(x)$ случайной величины X, равномерно распределённой на отрезке $[a,b]$, определяется формулой 4.5. В данном случае $a=2, \quad b=7, \quad b-a=5$; следовательно,

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{5} & \textit{при} \quad 2\le x\le 7, \\ 0 & \textit{при} \quad x<2 \textit{ или } x>7. \end{cases}$$

Функция распределения $F(x)$ определяется формулой 4.6

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x\le 2, \\ \dfrac{x-2}{5} & \textit{при} \quad 2<x<7, \\ 1 & \textit{при} \quad x\ge 7. \end{cases}$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X равномерно распределенной на отрезке $[2,7]$, вычисляется по формуле 4.7

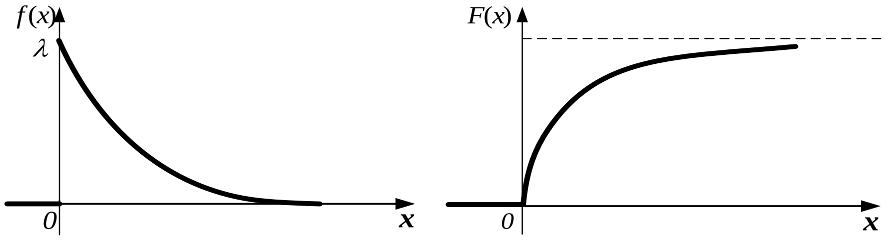
$$M(X)=\frac{2+7}{2}=4{,}5, \qquad D(X)=\frac{(7-2)^2}{12}=\frac{25}{12}=2{,}08.$$

6.3.4 Показательное распределение

Непрерывная случайная величина X имеет показательное (экспоненциальное) распределение, если её плотность вероятности имеет вид

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & при \quad x\ge 0,\\ 0, & при \quad x<0.\end{cases} \qquad (28)$$

Положительная величина λ, называется параметром распределения.



Функция распределения непрерывной случайной величины X, имеющей показательное распределение, имеет вид

$$F(X)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0\end{cases} \qquad (29)$$

Числовые характеристики показательного распределения:

$$\left.\begin{aligned} M(X)&=\frac{1}{\lambda}\\ D(\tilde{O})&=\frac{1}{\lambda^2}\\ \sigma\left(X\right)&=\frac{1}{\lambda}\end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

Показательное распределение широко применяется в теории надежности, как закон распределения времени наработки на отказ (безотказной работы) сложных технических систем, их подсистем, агрегатов и элементов.

Согласно определению ***вероятность безотказной работы*** некоторого технического устройства до первого отказа выражается ***функцией*** надежности

$$p(t)=P(T\ge t),$$

где T – случайная величина - время наработки на отказ.

Выражая её через противоположное событие и предполагая T – случайная величина распределенная по показательному закону, получим

$$p(t)=1-P(T<t)=1-F\left(t\right)=e^{-\lambda t}$$

Вероятность отказа за время t равна

$$q(t)=1-p(t)=1-e^{-\lambda t}=F\left(t\right),$$

а плотность вероятности случайной величины T связана с вероятностью отказа соотношением

$$f(t)=F'(t)=q'(t)$$

Среднее время наработки на отказ (или математическое ожидание этого времени) в соответствии с (4.10) равно

$$m_t=\frac{1}{\lambda}$$

Параметр распределения λ играет роль интенсивности отказов.

Показательное распределение тесно связано с простейшим (стационарным пуассоновским) потоком событий. В частности интервал времени между двумя соседними событиями в простейшем потоке имеет показательное распределение с параметром λ, равным интенсивности потока

$$f(t)=\lambda e^{-\lambda t},\quad t>0.$$

Пример. Случайная величина X подчинена показательному закону распределения с параметром μ: $f\left(x\right)=\mu e^{-\mu x}$ ï ðè $x>0$.

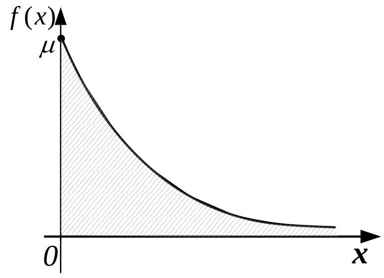
1) Построить кривую распределения;

2) найти функцию распределения $F\left(x\right)$ и построить её график;

3) найти вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее, чем её математическое ожидание.

Решение

1)



2) $F\left(x\right)=\int\limits_{-\infty}^{x} f\left(x\right)dx$

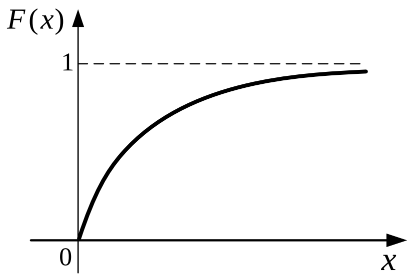
$x\le 0 \qquad F\left(x\right)=0$

$$x>0 \qquad F\left(x\right)=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dx+\int\limits_{0}^{x}\mu e^{-\mu x}dx=\mu\cdot\frac{1}{-\mu}\int\limits_{0}^{x}e^{-\mu x}d\left(-\mu_x\right)=$$

$$=-e^{-\mu x}\Big|_0^x=-e^{-\mu x}+1=1-e^{-\mu x},$$

тогда

$$F\left(x\right)=\begin{cases}0, & при \quad x\le 0,\\ 1-e^{-\mu x}, & при \quad x>0.\end{cases}$$



3) $m_x=\dfrac{1}{\mu};\quad P\left\{X<\dfrac{1}{\mu}\right\}=F\left(\dfrac{1}{\mu}\right)=1-e^{-1}\approx 0{,}632.$

Задачи для решения в аудитории

1. По цели производится 10 независимых выстрелов. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа попаданий, если вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,6.

2. В урне находятся 8 белых, 5 красных и 2 голубых шара. Производится 5 извлечений с возвращением по одному шару. Найти вероятность, что появится следующий состав шаров: 3 белых и по одному остальных цветов.

3 Коммутатор учреждения обслуживает 100 абонентов. Вероятность того, что в течение одной минуты абонент позвонит на коммутатор, равна 0,01. Найти вероятность того, что в течение одной минуты позвонят: а) ровно три абонента, б) менее трёх абонентов, в) более трёх абонентов, г) хотя бы один абонент.

4. Найти среднее число λ бракованных изделий в партии изделий, если вероятность того, что в этой партии содержится хотя бы одно бракованное изделие, равна 0,95. Предполагается, что число бракованных изделий в рассматриваемой партии распределено по закону Пуассона.

5. Цена деления шкалы амперметра равна 0.1 ампера. Показания амперметра округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,02 ампера.

6. Самолет, выполняющий боевой полет, пересекает зону ПВО противника, где по нему действует поток атак средств ПВО. Предполагая поток атак средств ПВО простейшим с интенсивностью λ = 0,10 ат/час, определить вероятность того, что следующая атака после очередной атаки средств ПВО произойдет в течение 5 минут.

7. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для данного стрелка 0,7 и не зависит от номера выстрела. Произведено пять выстрелов. Построить ряд распределения числа попаданий в мишень. Найти $M(X)$ и $\sigma(X)$ – числа попаданий в мишень.

8. Радиоаппаратура состоит из 1000 электроэлементов. Вероятность отказа одного элемента в течении одного года работы равна 0,001 и не зависит

от состояния других элементов. Какова вероятность отказа двух элементов? Какова вероятность отказа не менее двух элементов за год?

9. Случайная величина T – время работы радиолампы – имеет показательное распределение. Определить вероятность того, что время работы лампы будет не меньше 1000 часов, если среднее время работы радиоволн 600 часов.

10. На радиомаяк-ответчик в среднем поступает 15 запросов за час. Считая число запросов случайной величиной, распределённой по закону Пуассона, определить вероятность того, что за 4 минуты:

а) поступит ровно 3 запроса;

б) поступит хотя бы один запрос.

11. Случайная величина T – время безотказной работы некоторых элементов радиоаппаратуры самолета – подчинена показательному распределению

$$f(t)=\begin{cases} Ae^{-0,1t}, & t \ge 0 \\ 0, & t<0 \end{cases} \qquad A = const > 0$$

Найти: а) постоянную A;

б) $F(t)$;

в) вероятность безотказной работы (надежность) элементов радиоаппаратуры в течение заданного времени T

г) $M(T)$ и $D(T)$.

12. Непрерывная величина X распределена по показательному закону:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < 0, \\ 2e^{-2x}, & при \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Найти вероятность попадания значений величины X в интервал $(0{,}1;\, 0{,}7)$.

13. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 5 мин. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ждать очередной автобус менее 3 мин.

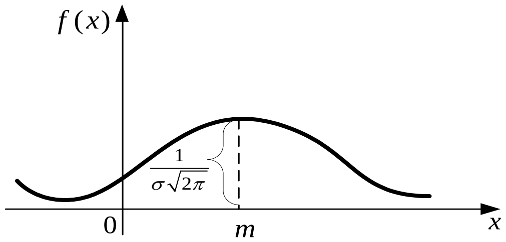
14. Найти дифференциальную, интегральную функции распределения случайной величины X, распределенной равномерно на интервале (2;8) и найти $M(X)$ и $\sigma(X)$.

6.4. Нормальный закон распределения

Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами m и σ, если её плотность вероятности имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (31)$$

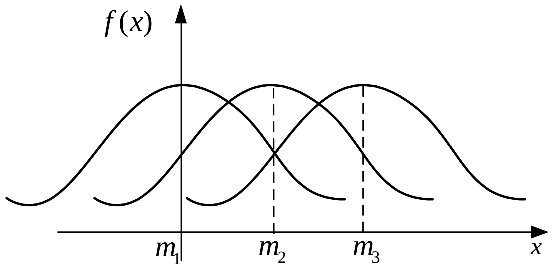
Нормальный закон называют ещё законом Гаусса (1777-1855гг, немецкий математик), получившего впервые этот закон распределения как закон распределения ошибок при астрономических (точных) наблюдениях.

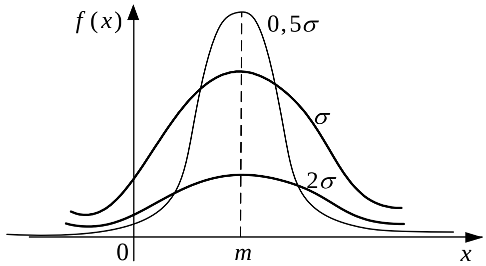


Кривую распределения называют ещё кривой Гаусса, она зависит от параметров m и σ. Максимальная ордината кривой, равная $f_{\max}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

достигается при $x = m$

При изменении параметра m кривая смещается вдоль числовой оси, не изменяя формы.





При изменении параметра σ кривая распределения изменяет свою форму: при уменьшений σ (рассеивание случайной величины X уменьшается) кривая вытягивается вверх, а при увеличении σ (рассеивание случайной величины X увеличивается) она сплющивается и прижимается к оси Ox.

Числовые характеристики нормального распределения

$$M(X) = m.$$

Величина m – математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X, называется её «центром рассеивания».

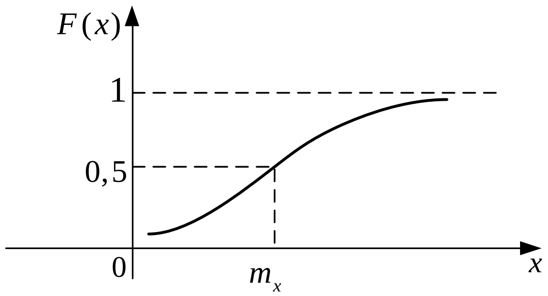
$$D(X) = \sigma^2.$$

То есть дисперсия случайной величины X распределенной по нормальному закону есть не что иное как среднее квадратическое отклонение случайной величины X

$$\sigma(X) = \sqrt{D(\tilde{O})} = \sigma.$$

Функция распределения $F(x)$ случайной величины X распределенной по нормальному закону или ***нормальная функция распределения*** задается выражением

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}dt. \qquad (32)$$



Так как $\int e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ не выражается через элементарные функции, то для его вычисления пользуются таблицами значений специальной функции, которая называется ***функцией Лапласа***, или ***нормальным интегралом вероятности*** и имеет вид

$$Ф(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt. \qquad (33)$$

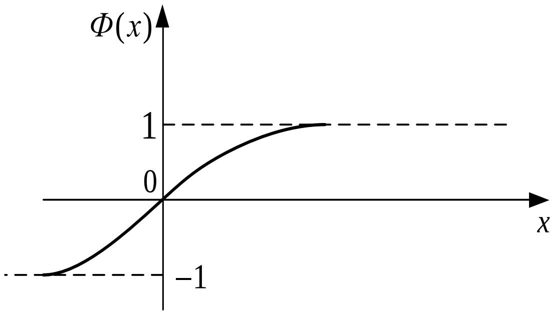
Функция Лапласа обладает следующими свойствами:

1. $Ф(0) = 0$. Следует из того, что при $x = 0$, пределы интегрирования совпадают.

2. $Ф(\infty) = 1$.

3. $Ф(-x) = -Ф(x)$ есть функция нечётная.

4. Функция Лапласа является монотонно возрастающей функцией.



При $x > 5$, значение функции Лапласа практически равно единице. Учитывая, что

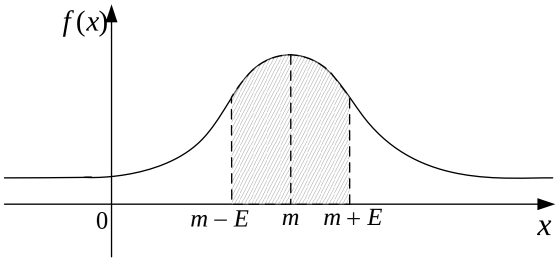
$F(x)=P(-\infty<X<x)$, для нормального закона, её можно представить через *Ф(x)* в виде

$$F(x)=\frac{1}{2}\left(1+Ф\left(\frac{x+m}{\sigma}\right)\right) \qquad (34)$$

Для характеристики ширины нормальной кривой вместо среднего квадратического отклонения в теории стрельбы используют вероятное отклонение *E*.

Вероятным отклонением называется половина длины участка, симметричного относительно математического ожидания, вероятность попадания в который равна 0,5, т.е. $P(|x-m|<E)=0,5$.

Геометрически вероятное отклонение E есть половина длины участка оси Ox, симметричного относительно *МОЖ*, на который опирается половина площади, ограниченной кривой распределения.



Полагая в выражении нормального закона $\sigma = \dfrac{E}{\rho\sqrt{2}}$,

где $\rho = 0{,}477$, получим ещё одну форму нормального закона

$$f(x) = \frac{\rho}{E\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\rho^2 (x-m)^2}{E^2}}. \qquad (35)$$

Если случайная величина X задана плотностью вероятности *f (x),* то вероятность попадания случайной величины X на отрезок $[\alpha, \beta]$ определяется по формуле

$$P(\alpha \le X \le \beta) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right)\right). \qquad (36)$$

Рассмотрим важный частный случай формулы (36), когда $[\alpha, \beta]$ симметричен относительно математического ожидания

$$P(|X-m| < e) = P(m - e < X < m + e) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{e}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{e}{\sigma}\right)\right) = \Phi\left(\frac{e}{\sigma}\right).$$

Итак,

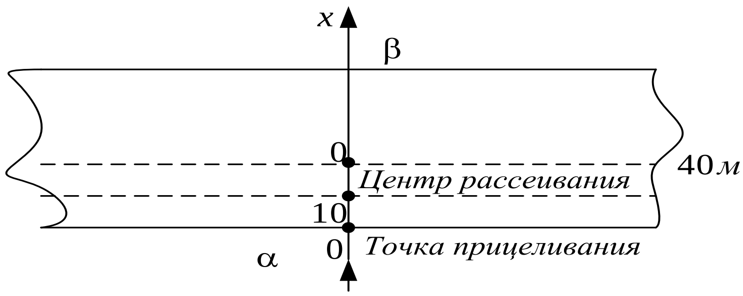
$$P(|X-m| < e) = \Phi\left(\frac{e}{\sigma}\right). \qquad (37)$$

Используя формулу (37), найти $P(|X-m| < 3\sigma) = \Phi(3) = 0{,}9972.$

Таким образом, для нормально распределенной случайной величины X с параметрами m и σ выполнение неравенства $|X-m| < 3\sigma$ практически достоверно, В этом заключается так называемое правило ***трёх сигм.***

Пример. Производится бомбометание по мосту длиной 200м и шириной 40м. Бомбардировщик заходит поперек моста, прицеливание производится по его передней кромке. Ошибка в направлении захода на цель – случайная величина X, распределенная по нормальному закону с параметрами m = 10м, σ = 20м. Определить вероятность попадания в мост одной бомбы.

Решение



Вероятность попадания в длинные и узкие цели (мосты, шоссе, ВПП аэродрома, плотина ГЭС и т.д.) при бомбометании и стрельбе вычисляется как вероятность попадания на отрезок, так как при заходе поперек цели существенна лишь по дальности, а по направлению (боковая ошибка), попадание обеспечено (длина превышает максимальную ошибку в этом направлении). Поместим начало координат в точку прицеливания, за положительное направление примем направление захода.

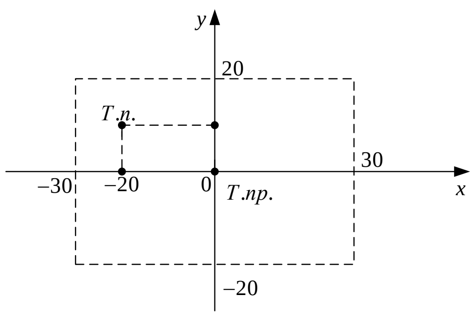
Тогда $\lambda = 0$; $\rho = 40м$; $m = 10м$; $\sigma = 20м$. По формуле (4.18) и таблицам функции Лапласа найдем вероятность попадания в мост

$$P(0 \le X \le 40) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{40-10}{20}\right) - \Phi\left(\frac{0-10}{20}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\Phi(1,5) - \Phi(0,5)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(0,8664 + 0,3829\right) = \frac{1,2493}{2} = 0,62465.$$

Задачи для решения в аудитории

1. Производится стрельба с самолета по цели, имеющей вид прямоугольника с размерами (60 × 40)м^2. Прицеливание производится по центру цели. Заход на цель вдоль оси Ox. Характеристики рассеивания средств поражения: $m_x = 20м,$ $m_y = 10м,$ $\sigma_x = 20м,$ $\sigma_y = 15м.$ Какова вероятность попадания средств поражения в цель.



2. Значения теста IQ (коэффициента интеллекта) Стенфорда-Бине распределены приблизительно по нормальному закону с математическим ожиданием $a=100$ и средним квадратичным отклонением $\sigma=16$. Записать выражения для функции распределения коэффициента интеллекта и плотности его распределения. Построить графики этих функций.

3. Текущая цена акции может быть приближена нормальным распределением с математическим ожиданием 15,28 руб. и средним квадратичным отклонением 0,12 руб. Рассчитать вероятности того, что цена акции окажется: а) не ниже 15,50 руб.; б) не выше 15,00 руб.

4. Случайная величина X распределена нормально со средним $M(X)=10$, а вероятность её попадания в интервал $(5;15)$ равна 0,8. Найти вероятность попадания X в интервал $(9;10)$.

6.5 Предельные теоремы теории вероятностей

Под ***законом больших чисел*** в широком смысле понимается общий принцип, согласно которому, совокупное действие большого числа случайных факторов приводит к результату, почти не зависящему от случая.

Под законом больших чисел в ***узком*** смысле понимается ряд математических теорем, в каждой из которых для тех или иных условий устанавливается факт приближения средних характеристик большого числа опытов к определенным постоянным, неслучайным величинам.

Неравенство Чебышева:

Для любой с.в. X, имеющей математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$ справедливо неравенство

$$P\left(\left|X - M(X)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Неравенство Чебышева можно заменить равносильным

$$P\left(\left|X - M(X)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Неравенство Чебышева справедливо и для дискретных, и для непрерывных случайных величин.

Если случайная величина $X = m$ имеет биномиальное распределение с математическим ожиданием $M(X) = a = np$ и дисперсией $D(X) = npq$, то неравенство Чебышева имеет вид

$$P\left(\left|m - np\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{npq}{\varepsilon^2}.$$

Одной из важнейших форм закона больших чисел является теорема Чебышева.

Теорема Чебышева Если случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ независимы и существует такое число $c > 0$, что $D(X_i) \leq c\ (i = 1, 2, 3, \ldots)$, то для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{c}{n\varepsilon^2}.$$

Из последнего неравенства следует предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Теорема Чебышева показывает, что среднее арифметическое большого числа случайных величин как угодно мало отличается от среднего арифметического их математических ожиданий.

Теорема Бернулли. Если в условиях схемы Бернулли вероятность наступления события в одном опыте равна p, число наступлений этого события при n независимых испытаниях равна m, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1, \text{ или } \quad P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)>1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}, \quad P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)<\frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Центральная предельная теорема. Теорема Ляпунова

Если $X_1, X_2, X_3, ... X_n, ...$ независимые случайные величины, имеющие математическое ожидание a_i, дисперсию σ_i^2 и конечные абсолютные центральные моменты третьего порядка, удовлетворяющие условиям $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}|\mu_3|_i}{\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right)^{\frac{3}{2}}}=0$, то при неограниченном увеличении n закон распределения нормированной суммы $Z_n=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-\sum_{i=1}^{n}M(X_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}D(X_i)}}$ сходится по вероятности к нормальному закону с плотностью вероятностей $\varphi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$, $-\infty<z<+\infty$, для которого $a=0, \quad \sigma=1.$

Частными случаями центральной предельной теоремы для дискретных случайных величин являются теоремы Муавра – Лапласа. Нормированная сумма Z_n будет иметь вид

$$Z_n=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}.$$

Теорема Муавра - Лапласа (локальная) Если $0<p<1$, то равномерно для всех m, удовлетворяющих неравенствам $a\le\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\le b$,

где a и b - любые заданные постоянные числа имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{(m-np)^2}{2npq}}-p_{m,n}\right)=0.$$

На практике локальная теорема используется при больших значениях n для вычисления вероятности того, что некоторое событие A наступает m раз в n испытаниях. Эту вероятность находят по приближенной формуле

$$P(Z_n=m)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(z), \text{ где } \quad z=\frac{m-np}{\sqrt{npq}};\ \varphi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

Функция $\varphi(z)$ - четная, т.е. $\varphi(-z)=\varphi(z)$ и для неё составлены таблицы (Приложение 2).

Если требуется найти вероятность неравенства $m_1\le x\le m_2$, то применяют интегральную теорему.

Теорема Муавра - Лапласа (интегральная) Если производится n независимых опытов, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью p, то для любого интервала (m_1, m_2) справедливо соотношение

$$P\left(m_1 < \frac{m-np}{\sqrt{npq}} < m_2\right) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}\right)\right),$$

$q = 1-p$, $\Phi(x)$ - функция Лапласа (Приложение 3).

Решение типовых примеров

1. Среднее значение длины деталей, изготовленной цехом, равно 50 см, а дисперсия равна 0,1. Оценить вероятность того, что изготовленная деталь окажется по своей длине не меньше 49,5 см и не больше 50,5.

Решение

Т.к. $M(X)$ = 50, то условие $49{,}5 < x < 50{,}5$ в котором $СВ$ X обозначает возможную длину детали, можно заменить на условие $\left|\mathrm{X} - \mathrm{M}(\mathrm{X})\right| \le 0{,}5$.

Используем неравенство Чебышева: $\varepsilon = 0{,}5$ и $D(X) = 0{,}1$.

$$P\left(\left|X-50\right| \le 0{,}5\right) \ge 1 - \frac{0{,}1}{(0{,}5)^2} = 1 - \frac{0{,}1}{0{,}25} = 0{,}6 \cdot$$

2. Вероятность появления события А в каждом испытании равна $\frac{1}{2}$. Пользуясь неравенством Чебышева оценить вероятность того, что число X появлений события А будет заключено в пределах от 40 до 60, если будет произведено 100 независимых испытаний.

Решение

Найдем математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины X — числа появлений события А в 100 независимых испытаниях:

$$M(X) = np = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50;$$

$$D(X) = npq = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 25.$$

Найдем максимальную разность между назначенным числом появлений события и математическим ожиданием

M(X)=50: $\varepsilon = 60 - 50 = 10$.

Воспользуемся неравенством Чебышева в форме

$$P\left(\left|X - M(X)\right| < \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Подставив $M(X) = 50$, $D(X) = 25$, $\varepsilon = 10$, получим

$$P\left(\left|X-50\right| < 10\right) \ge 1 - \frac{25}{10^2} = 0{,}75.$$

3. При каком числе независимых испытаний вероятность выполнения неравенства $\left|\frac{m}{n}-p\right|<0,2$ превысит 0,96, если вероятность появления события в отдельном испытании p = 0,7 ?

Решение

$p=0,7 \Rightarrow q=0,3, \quad \varepsilon=0,2$. Требуется определить n с помощью неравенства Чебышева

$$P\left(\left|X-M(X)\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Условие $P>0,96$ равносильно неравенству

$$\frac{pq}{n\varepsilon^2}<0,04, \qquad n>\frac{pq}{0,04\varepsilon^2}; \quad n>\frac{0,7\cdot 0,3}{0,2\cdot 0,04}=\frac{0,21}{0,0016}=131,25 \ .$$

Следовательно, требуемое неравенство выполняется при числе независимых испытаний, начиная со 132.

Задачи для решения в аудитории

1. Вероятность того, что изделие некоторого производства окажется нестандартным, равна 0,01. Чему равна вероятность, что в партии из 1000 наудачу выбранных изделий окажется ровно 5 нестандартных?

2. На некотором производстве вероятность того, что изделие окажется нестандартным, равна 0,01. Найти вероятность того, что в партии из 1000 изделий окажется не более 12 нестандартных.

3. Дано: $P(|X-m|>\varepsilon)>0{,}9$ и $D(x)=0{,}009$. Используя неравенство Чебышева, найти ε.

4. Вероятность наступления события А в каждом из 1500 испытаний равна 0,2. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что отклонение числа наступлений события А от математического ожидания будет более 40.

5. Число дождливых дней в году для данной местности является случайной величиной X с M(X)=100. Оценить вероятность того, что в следующем году в данной местности будет меньше 140 дождливых дней.

ОГЛАВЛЕНИЕ